Geschenk des Verfassers an die k. Akad.

d. Wissenschaften.

Malh. P. 207

Mathesis applicata. 412.

Donum autoris ad
Academiam.

R

Lehrbuch

der

Arithmetik

zum Gebrauche

auf

hohen und niedern Schulen

wie zum

Selbstunterricht

von

Johann Karl Friedrich Hauff.

Zweyte verbesserte und vermehrte Ausgabe.

Marburg
in der neuen akademischen Buchhandlung
1807.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Als ich im Jahre 1793 das Lehrbuch der Arithmetik, von dessen zweyter Auflage ich hier einige Nachrichten zu geben habe, zum ersten Male herausgab, war meine Hauptabsicht darauf gerichtet, dem Anfänger ein gründliches, nicht zu schweres, und doch, besonders in dem praktischen Theile, hinreichend vollständiges Lehrbuch in die Hände zu geben, welches sich ausserdem von andern hauptsächlich durch die zwey Eigenschaften unterscheiden sollte, 1) daß es den Lehrling, soviel, als möglich, zur Selbsterfindung der Wahrheiten dieser Wissenschaft anführte, 2) daß es ihn so weit brächte, als man, ohne Buchstaben, als willkührliche Zeichen der Größen zu Hülfe zu nehmen, darin kommen kann. Den Gebrauch der Anfangsbuchstaben der Wörter, als charakteristischer Zeichen der Größen, z. B. G für gesuchtes Glied, S für Summe, hatte ich mir in einigen Fällen erlaubt, weil sie die Vortheile der allgemeinen Bezeichnung gewähren, ohne den Anfänger durch ein geheimnißvolles An-

sehen, wie bey den willkührlichen Zeichen x, y, z nicht selten geschiehet, abzuschröcken.

Das Buch war damals zunächst für den Privatunterricht und dann für lateinische Schulen und Gymnasien bestimmt, und daß es diese Bestimmung glücklich erfüllt habe, kann ich nicht nur aus meiner eigenen Erfahrung, sondern auch auf das Zeugniß mehrerer würdigen und verdienten Männer hin, die sich desselben bey ihren Vorträgen mit gleichem Erfolge bedienten, mit Vergnügen versichern.

Noch in demselben Jahre änderte sich meine äußere Lage. Bey meinen mathematischen Vorlesungen auf der hiesigen Universität legte ich Anfangs die zweyte Ausgabe der lorenzischen Elemente zum Grunde, aber ich arbeitete größtentheils ohne Erfolg. Auch im folgenden Jahre behielt ich eben dieses Handbuch bey; aber alle meine Bemühungen waren vergeblich. Ich blieb immer dem größeren Theile unverständlich.

Sobald ich mich nun überzeugt hatte, daß die Ursache davon einzig in dem unglaublich grossen Mangel an wissenschaftlichen Vorkenntnissen aller Art zu suchen sey, der bey den angehenden Studirenden unserer Zeit in der Regel überall sichtbar wird, so nahm ich bey dem Vortrage der Arithmetik zu meinem eigenen Lehrbuche und bey jenem der Geometrie zu meinem Euklid meine Zuflucht.

Daß ich in dem ersteren, um es den höheren Zwecken des akademischen Unterrichts, auf

welche in der ersten Anlage desselben gar keine Rücksicht genommen war, zugleich mit anzupassen, manches habe abändern, und manches zusezen müssen, brauche ich Kennern wohl nicht zu sagen.

Diese, durch die erweiterte Bestimmung meines Lehrbuchs nöthig gewordenen, Abänderungen und Zusätze sind nun in der gegenwärtig erscheinenden zweyten Ausgabe desselben überall am gehörigen Orte angebracht und eingetragen worden. Verständigen Richtern möchte ich vorzüglich den fünften und eilften Abschnitt zur genaueren Prüfung empfehlen. In jenem glaube ich bey der Anweisung zu Bildung der Proportionen aus den gegebenen Bestimmungsstücken der Aufgaben die Evidenz der Demonstration mit der Leichtigkeit der mechanischen Regel auf das vollkommenste vereinigt, in diesem aber die allgemeine Theorie der Proportionen so ausgeführt zu haben, wie es der wesentliche Charakter der Mathematik als reiner Vernunftwissenschaft und die Bedürfnisse ihrer übrigen Theile erfordern.

Bey dem Vortrage der Lehre von den entgegengesezten Größen bin ich hauptsächlich der Kantischen Abhandlung über diesen Gegenstand *) gefolgt, weil es, nach meiner Ueberzeugung, unmöglich ist, eine gründlichere und lichtvollere Darstellung dieser Lehre, als die dort ausgeführte, zu geben.

---

*) Immanuel Kants vermischte Schriften I. Bd. Halle. 1799. S. 611. ff. Die erwähnte Abhandlung ist schon von 1763!

Wenn ich in neueren Schriften den Rath finde, daß es am besten gethan seyn würde, die arithmetischen Operationen mit den entgegengesezten Größen von dem Begriffe dieser Größen ganz unabhängig zu machen, d. h. die Regeln für die Operationen mit den entgegengesezten Größen aufzustellen, ohne den Begriff dieser Größen vorher erörtert und festgesezt zu haben, so werde ich dadurch, wie durch manche andere literärische Erscheinung unserer Zeit, an jene merkwürdige Wendung erinnert, welche einmal in meiner Gegenwart ein junger Theologe im Streite mit einem Juristen nahm, als dieser ihm sagte, daß sie beyde einander gar nicht verständen. „Aber, gesezt, wir verständen „einander, — erwiederte der Theologe — „so „müßten Sie doch zugeben, daß ꝛc. ꝛc.“

Die Anwendung davon zu machen überlasse ich dem Leser.

Ebenso, wenn ich lese, daß die Tauglichkeit des segnerischen Schiffs (§. 147.) zur Erläuterung des Begriffs der entgegengesezten Größen aus dem Grunde in Anspruch genommen wird, weil dabey Positiv und Negativ nichts anders, als Rubriken für die zusammenzuzählenden Größen bedeuten, so möchte ich fragen: „wa„ren etwa bey der zu Athen gewöhnlichen Art „die Abstimmungen für und wider Etwas durch „Einlegen schwarzer und weißer Steinchen (ψη„φων μελαινων και λευκων) in einen Topf zu „bewerkstelligen, Schwarz und Weiß deßwe-

„gen auch nichts anders, als Rubriken „für die zusammenzuzählenden Stimmen, weil „sie zugleich die Nebenbestimmung hatten, das „zu seyn?, oder: verlohren sie etwa dadurch die „Natur der Zeichen entgegengesezter „Stimmen *), daß sie zugleich die, auf eben „diese Natur gegründete, Nebenbestimmung hat„ten, bey Zusammenzählung dieser entgegenge„sezten Stimmen als Rubriken zu dienen?"

Ich habe bey dem Vortrage dieser, so wie der übrigen streitigen Lehren meiner Ueberzeugung gefolgt, und deren Gründe überall beygebracht.

Im dritten Abschnitte habe ich die Tafel der verschiedenen Maase weggelassen, weil sie, auch bis zur Vollständigkeit erweitert, doch wahrscheinlich nur auf kurze Zeit würde brauchbar gewesen seyn, da man, dem Vernehmen nach, jezt in mehreren teutschen Staaten mit den Anstalten zu Einführung eines einförmigen Maaßsystems beschäftigt ist.

Nachdem mich nun eine mehr als zwölfjährige Erfahrung überzeugt hat, daß der so eingerichtete Vortrag der Elementarmathematik in der Regel bey allen mit sichtbarem Nutzen, und bey besseren Köpfen, die mit Ernste an ihrer wissenschaftlichen Ausbildung arbeiten, mit ausgezeichnet glücklichem Erfolge begleitet sey, so werde ich wohl der Mühe überhoben seyn können, die,

---

*) Mos erat antiquus, niveis atrisque lapillis,
His damnare reos, illis absolvere culpae.
Ovid. Met. XV, 41 ff.

bloß auf einige theoretische Grillen gestüzte, und den Naturgesezen, an welche die Entwickelung unseres Geistes gebunden ist, geradezu widersprechende, Behauptung anderer, daß man bey dem Vortrage der mathematischen Wissenschaften immer mit der allgemeinsten Methode den Anfang machen müsse, umständlich zu widerlegen.

Marburg
in den Herbstferien
1807.

Johann Karl Friedrich Hauff.
Professor der Mathematik und Physik.

Inhalt.

Erster Abschnitt:

Seite.

Von den ganzen Zahlen 1

Zweyter Abschnitt:

Von den gebrochenen Zahlen 35

Dritter Abschnitt:

Von den benannten Zahlen 59

Vierter Abschnitt:

Von den Verhältnissen und Proportionen 72

Fünfter Abschnitt:

Anwendungen der Lehre von den Proportionen . . . 94

Sechster Abschnitt:

Von den Theilern der Zahlen 138

Siebenter Abschnitt:

Von den Decimalbrüchen 156

Achter Abschnitt:

Von den Quadrat- und Cubik-Zahlen und Wurzeln . 181

Neunter Abschnitt:

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen und den Logarithmen 220

Zehnter Abschnitt:

Seite.
Von den Rechnungsarten mit Buchstaben 259

Eilfter Abschnitt:

Allgemeine Theorie der Verhältnisse und Proportionen 342

Zwölfter Abschnitt:

Ergänzungen einiger früheren Abschnitte durch den zehnten und eilften 374

Zusäze 391

Anhang:

Geschichte und Literatur der elementaren Arithmetik . 397

Erster Abschnitt.

Von den ganzen Zahlen.

§. 1.

Unter der Zahlenwissenschaft (Arithmetica) versteht man die Wissenschaft von den Eigenschaften und Verhältnissen der Zahlen und den Methoden, aus gegebenen Zahlen und ihren Verhältnissen andere unbekannte zu finden.

Da nach dieser Erklärung die Zahlen den eigentlichen Gegenstand der Arithmetik ausmachen, so entstehen nun zuerst die Fragen:

1) Was ist eine Zahl? und

2) Wie kommen wir zu der Vorstellung davon?

Die Beantwortung der lezten dieser Fragen, welche auch zugleich zur Beantwortung der ersten führen wird, kann uns nicht schwer fallen, wenn wir nur ein wenig über das Verfahren nachdenken, was wir in allen Fällen anwenden müssen, wo wir mehrere Dinge zusammenzählen, und über die Beschaffenheit, welche die Dinge haben müssen, die wir zusammenzählen, oder in einer Zahl zusammenfassen sollen.

Wir werden alsdann bald finden

1) daß wir überhaupt nur dann zählen können, wann wir mehr, als ein Ding, vor uns haben.

2) daß wir, ehe wir zählen können, die vorhandenen Dinge erst mit einander vergleichen und

3) durch diese Vergleichung uns überzeugen müssen, daß sie einander so ähnlich seyen, daß, wenn man ihrer mehr, als eins, hat, es ebensoviel sey, als ob man ein und dasselbe Ding mehrmals vor sich hätte.

Gesezt z. B. es sehe jemand in einem Garten eine Baumgruppe, deren einzelne Bäume sich durch folgende Merkmale unterscheiden:

Nro. 1. habe zwey
— 2. — fünf } Nadeln in einer Scheide;

— 3. — Büschеln mit stumpfen
— 4. — — — spizen } Nadeln;

— 5. } haben weiche und breite Nadeln einfach und
— 6. } kammartig, auf zwey entgegengesezten Seiten der Zweige;

— 7. } haben steife und schmale Nadeln rund um
— 8. } die Zweige her;

so wird er sogleich bemerken, daß diese Bäume in Ansehung der Art, wie ihre Nadeln an den Zweigen sizen, paarweise einerley Merkmale haben.

Weiß er nun ferner, daß, wenn man bloß die Art, wie die Nadeln an den Zweigen sizen, zum Eintheilungsgrunde dieser Bäume annimmt, ohne auf deren übrige Verschiedenheit Rücksicht zu nehmen, Bäume mit zwey bis fünf Nadeln in einer Scheide zur Gattung der Kiefern, solche, deren Zweige mit ganzen Nadelbüschеln besezt sind, zur Gattung der Lerchen, solche, die weiche und breite Nadeln auf zwey entgegengesezten Seiten der Zweige einfach und kammartig tragen, zur Gattung der Tannen, und solche, deren Zweige

mit steifen und schmalen Nadeln rings umher besezt sind, zur Gattung der Fichten gehören, so wird er sagen können: „in dieser Baumgruppe stehen zwey Kiefern, zwey Lerchen, zwey Tannen „und zwey Fichten."

Da aber jedes Paar dieser Bäume in Ansehung der Art, wie die Nadeln an den Zweigen sizen, seine eigenthümlichen Merkmale hat, wodurch es sich von jedem der übrigen deutlich unterscheidet, so ist, so lange man diese eigenthümlichen Merkmale in Betrachtung zieht, kein weiteres Zusammenzählen derselben möglich. Sollen sie also doch zusammengezählt, d. h. als einzelne Bäume in einer Zahl zusammengefasset werden, so kann dies nicht anders geschehen, als dadurch, daß man von allen eigenthümlichen Merkmalen derselben absieht, und bloß diejenigen heraushebt, die sie alle mit einander gemein haben, und solche in einen Begriff zusammenfasset, der alsdann, eben weil er bloß diejenigen Merkmale enthält, worin sie alle einander ähnlich sind, ihnen allen zukommen, von einem wie vom andern ein Prädicat abgeben muß. So haben in dem hier gewählten Beyspiele alle Theile der Baumgruppe diejenigen Merkmale mit einander gemein, welche zusammen den Begriff eines Nadelbaums bestimmen. Bleiben wir nun bey diesem Begriffe stehen, ohne auf die übrigen, jedem derselben eigenthümlichen, Merkmale zu sehen, so können wir sagen: in allen diesen Dingen findet sich Einheit des Begriffs oder der Merkmale, und um dieser Einheit willen, oder nach dieser Einheit, heißt jedes von ihnen eins, nämlich eins von solchen Dingen, denen dieser Begriff zukommt, oder, die durch ihn, als durch ihr Prädicat sich denken lassen. Und nun lassen sie sich auch ohne Anstand zusammenzählen; denn wegen der Einheit des Begriffs, die sich bey ihnen allen findet, ist es ganz gleichviel, ob wir mehrere von ihnen jedes einmal, oder eins von ihnen mehrmal sezen. Demnach machen die mehrerwähnten Theile der Baumgruppe zusammen acht Nadelbäume aus.

Da nun der Begriff, der diejenigen Merkmale enthält, die mehrere einzelnen Dinge mit einander gemein haben, der Begriff der Art ist, unter welcher

diese Dinge stehen. — Das Aufsteigen von den Arten zur Gattung, von den Gattungen zum Geschlechte u. s. w. geschiehet ebenso, wie das Aufsteigen von den Individuen zur Art, durch Weglassung der eigenthümlichen und Heraushebung der gemeinschaftlichen Merkmale — so ergiebt sich hieraus das Grundgesetz der Arithmetik: „nur gleichartige Dinge lassen sich zusammenzählen."

Und weil das Zusammenzählen mehrerer gleichartigen Dinge, bloß vermöge der Einheit des Begriffs der Art, der ihnen allen zukommt, oder unter welchen sie alle gebracht werden können, bewerkstelligt wird, und man dabey völlig ebenso verfährt, als ob bloß die Einheit dieses Begriffs (in concreto) mehr als einmal — sovielmal nämlich, als man Dinge hat, denen dieser Begriff zukommt — vorhanden wäre, so kann der Name, wodurch man anzeigt, wie viele Dinge dieser Art man habe, nichts anders seyn, als der Ausdruck einer gewissen Menge oder Anzahl von Einheiten, und eben deßwegen heißt jeder solche Name eine Zahl. Eine Zahl ist also nichts anders, als ein bestimmtes Vielfaches der Einheit.

So war im vorigen Beyspiele die herausgebrachte Zahl acht das Achtfache der Einheit, nämlich des Begriffs von einem Nadelbaume, unter welchem die zusammengezählten Dinge alle standen, welche Einheit also, da sie in jedem derselben einmal vorkam, in allen zusammen achtmal vorhanden war. Und ebenso verhält es sich mit allen übrigen Zahlen; alle ohne Ausnahme entstehen durch Wiederholung der zum Grunde gelegten Einheit des Begriffs oder der Merkmale, die sich an den Dingen findet, welche gezählt werden sollen. Wird zu einem noch eins hinzugesezt, so erhält man zwey; eins und zwey zusammengesezt giebt drey; sezt man zwey und zwey zusammen, so erhält man vier; vier und eins zusammen genommen giebt fünf, fünf und eins zusammen sechs; fünf und zwey macht sieben, fünf und drey giebt acht; sezt man fünf und vier zusammen, so erhält man neun; endlich giebt fünf zweymal genommen zehen.

Dieser Ursprung des Begriffs der Zahl und des Zählens ist in der wesentlichen Einrichtung unseres Vorstellungsvermögens so nothwendig und unabänderlich gegründet, daß auch in dem Sprachgebrauche der gemeinsten und unwissendsten Menschen nicht ein einziges Beyspiel nachzuweisen ist, das nicht den Grundsaz voraussezte, daß man nur da zählen könne, wo man von Dingen einer Art mehr als eins, vorfindet. Denn auch in der Sprache der gemeinsten und unwissendsten Menschen wird man, sobald es von Dingen einer Art mehr, als eins, giebt, dem Namen eines solchen Dings das Wörtgen ein oder eine (den unbestimmten Artikel) zum Anzeigen, daß hier gezählt werden könne (denn eins ist der Anfang alles Zählens) vorgesezt finden; da im Gegentheil wenn ein Ding das einzige in seiner Art ist, der Name desselben nie anders als mit den Wörtchen: der, die, das (dem bestimmten Artikel) vorkommen wird.

So wird z. B. der unwissendste Bauerjunge in der Stadt eben so gewiß nur nach dem Markte, dem Rathhause, dem Posthause ꝛc. hingegen nach einem Wirthshause, einer Badstube, einem Kramladen ꝛc. fragen, als er auf dem Dorfe nur von der Kirche, dem Schulmeister, der Feuersprize ꝛc dagegen überall nur von einer Last Holz, einem Bund Stroh, einem Eimer Wasser sprechen wird.

Noch einmal also: Jedes Ding wird eins genannt, wiefern an ihm etwas vorhanden ist, was an mehreren andern ebenso sich findet. Dieses Etwas heißt in abstracto die Einheit, und ist nichts anders, als das Aggregat der Merkmale, die zusammen den Begriff der Art ausmachen, unter welcher das Ding steht, oder zu welcher es gehört. Jedes bestimmte Vielfache dieser Einheit aber heißt eine Zahl.

§. 2.

Man zählt von den ältesten Zeiten her von eins bis zehen; alsdann fängt man wieder vorne an, nnd zählt zehen und eins, zehen und zwey, zehen und drey, oder anstatt dessen kürzer: eilf, zwölf, dreyzehn u. s. w.

Wenn man so bis auf zweymal zehen, oder zwanzig gekommen ist; so fängt man wieder von eins an, und zählt fort bis auf dreymal zehen oder dreyssig, und wenn man bis auf zehenmal zehen gezählt hat; so sagt man, man habe hundert. Hier ist nun ein neuer Absatz, bey welchem man wieder von eins anfängt, und bis auf zehen, von da aber wieder bis auf hundert, wie vorhin, fortzählt. Hat man solcher Hunderte zehen gezählt, so nennt man sie zusammen tausend, und dies ist abermal ein neuer Absatz, bey welchem man wieder von vorne anfängt zu zählen; hat man aber zehen solcher Tausende, so nennt man sie zusammen zehntausend, ist man ferner bis auf zehen solcher Zehentausende gekommen; so werden diese zusammen hunderttausend genannt, endlich nennt man zehen hunderttausende eine Million. Bey diesem großen Absatze fängt man wiederum von neuem an, und wenn man im Zählen bis auf millionenmal Million gekommen ist; so nennt man dies eine Billion, millionenmal Billion wird Trillion, millionenmal Trillion aber Quadrillion u. s. w. genannt.

§. 3.

Die Zahlen von eins bis neun, deren Namen in (§. 1.) angegeben worden, und deren Zeichen folgende sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nennt man Einer oder einfache Einheiten; zehen solcher einfachen Einheiten geben eine zusammengesezte Einheit, welche man einen Zehner nennt. Wenn man zehen solcher Zehner hat, deren jeder aus zehen Einern besteht; so geben diese eine neue zusammengesezte Einheit, welche man einen Hunderter nennt; zehen solcher Hunderter geben einen Tausender; zehen solcher Tausender einen Zehntausender u. s. w.

Diese zusammengesezten Einheiten kann man nach Ordnungen unterscheiden; so daß die Zehner die erste, die Hunderter die zweyte, die Tausender die dritte, die Zehntausender die vierte u. s. w. höhere Ordnung ausmachen.

Demnach begreift die Einheit einer jeden höheren Ordnung zehen Einheiten der nächstniedrigeren in sich,

oder, zehen Einheiten einer niedrigeren Ordnung machen immer eine Einheit der nächsthöhern aus. Dies Gesetz liegt nun bey der ganzen Arithmetik zum Grunde, und erleichtert ihre Anwendung ungemein. Um sich dasselbe recht anschaulich zu machen, betrachte man einen zehen Fuß langen geometrischen Maßstab, der in seine Fuße, Zolle, Linien, und Scrupel eingetheilt ist. Auf demselben stellen die Scrupel, als die kleinsten Theile, die einfachen Einheiten vor, und da zehen Scrupel auf eine Linie, zehen Linien auf einen Zoll, zehen Zolle auf einen Fuß, und zehen Fuß auf eine Ruthe gehen, so sind, in Ansehung der Scrupel, die Linien Zehner, die Zolle Hunderter, die Fuße Tausender, und die Ruthe ist ein Zehntausender.

§. 4.

Eben diesem arithmetischen Grundgesetze, welches das Zählen der Zahlen so sehr erleichtert, folgt mau auch bey dem Schreiben derselben, und bey dem Aussprechen geschriebener Zahlen mit gleichem Vortheil; denn man wird dadurch in den Stand gesezt, mit den neun einfachen Zahlzeichen alle möglichen Zahlen, sie mögen so groß seyn, als man will, zu schreiben, und eine geschriebene Zahlenreihe, sie mag aus so vielen Ziffern bestehen, als man will, auszusprechen. Da nämlich, vermöge dieses Gesetzes, jede Ziffer einer Zahlenreihe, in jeder nachfolgenden Stelle, von der rechten gegen die linke Hand gerechnet, einen zehnmal größern Werth hat, als in der vorhergehenden; so wird nun der Werth einer jeden Ziffer sogleich unmittelbar durch ihre Stelle bestimmt. Ist aber von irgend einer Ordnung gar keine Ziffer vorhanden, so wird dieses dadurch angedeutet, daß man in diese Stelle eine Nulle (o) sezt. Soll man demnach eine vorgegebene Zahl aussprechen, so verfahre man also: Man theile die gegebene Zahl von der rechten gegen die linke Hand in Klassen und Abtheilungen ein, so daß auf jede Klasse drey Ziffern, und auf jede Abtheilung zwey Klassen, also sechs Ziffern, kommen; nach jeder Klasse mache man unterhalb der Zahlenreihe ein Komma, und nach jeder Abtheilung oberhalb der Zahlenreihe eine römische Ziffer, welche jedesmal die Zahl der Abtheilung angiebt, also z. B. nach der ersten Ab-

theilung die Ziffer I, nach der zweyten II, nach der dritten III, nach der vierten die Ziffer IV u. s. w. Nun bezeichnet jedes Komma die Stelle eines Tausenders, die römische Ziffer I bezeichnet die Stelle der Million, II die Stelle der Billion, III die Stelle drr Trillion, IV die Stelle der Quadrillion und so fort. Auf diese Art hat man immer eigentlich nur drey Ziffern auszusprechen, wodurch also die Sache ungemein erleichtert wird. Man mache nun die Anwendung hiervon auf folgendes Beyspiel. Es seye zum Aussprechen vorgegeben die Zahl

IV III II I
987, 654, 323, 456, 789, 098, 765, 432, 109.

Nachdem diese Zahl gehörig abgetheilt worden, muß sie folgendergestalt ausgesprochen werden:

Neunhundert sieben und achtzig Quadrillionen, sechshundert vier und fünfzigtausend dreyhundert drey und zwanzig Trillionen, vierhundert sechs und fünfzig tausend siebenhundert neun und achtzig Billionen, acht und neunzig tausend siebenhundert fünf und sechzig Millionen, vierhundert zwey und dreyssig tausend einhundert und neun.

Dieses ganze Verfahren, welches man das Numeriren nennt, ist uns durch ein Naturgesetz unseres Vorstellungsvermögens, das Gesetz der Succession, ursprünglich vorgeschrieben, wodurch wir, um zu einer deutlichen Vorstellung von einem, aus vielen ungleichartigen Theilen zusammengesezten, Ganzen zu gelangen, genöthiget sind 1) das Ganze in seine ungleichartigen Theile zu zerlegen, 2) nach und nach von jedem dieser Theile ins Besondere uns eine deutliche Vorstellung zu verschaffen, und 3) aus allen diesen Theilvorstellungen die Vorstellung des Ganzen zusammenzufassen.

§. 4.

Wenn mehrere Zahlen gegeben sind, und man finden soll, wie viel sie alle zusammen in einer Zahl ausmachen, so hat man dazu eine eigene Rechnungsart nöthig, welche man das Addiren nennt: die vermittelst

derselben gefundene Zahl, welche allen gegebenen zusammen genommen gleich ist, wird die Summe, die gegebenen Zahlen aber, welche zusammen genommen die Summe ausmachen, werden summirende Zahlen oder Summanden genannt. Dies Zusammenzählen mehrerer Zahlen geht nun ganz leicht, so lange die vorgegebenen Zahlen nur Einheiten und Zehner enthalten, oder so lange ihrer überhaupt nur wenige sind; in solchen Fällen kann man meistens die Summe finden, ohne die gegebenen Zahlen vorher hinzuschreiben. Wenn aber der gegebenen Zahlen viele sind, oder wenn sie, ausser den Einheiten und Zehnern, auch noch Hunderter und Tausender, oder Ziffern von noch höhern Ordnungen enthalten, alsdann verfahre man also:

Man schreibe die gegebenen Zahlen alle untereinander, so, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter n. s. w., kurz, daß durchaus Ziffern von einerley Ordnung unter einander zu stehen kommen, und ziehe alsdann einen Strich darunter. Nun fange man bey den Einern an, und zähle die Ziffern zusammen, die in dieser Reihe unter einander stehen. Beträgt ihre Summe nicht mehr als 9, so seze man sie unter die Reihe der Einer; ist sie aber größer als 9, so wird nur die niedrigste Ziffer davon, das ist die, welche die Einheiten bezeichnet, unter die Reihe der Einer gesezt, die höheren Ziffern aber, Zehner und Hunderter, wenn solche da sind, werden unter die, gegen die linke Hand zu nachfolgenden, Reihen der zu addirenden Zahlen von eben diesen Ordnungen vorgerückt. Hat man auf diese Art die Summe der Einer gefunden, so gehe man zu der Reihe der Zehner fort, und verfahre mit diesen, wie auch mit den nachfolgenden Hundertern, Tausendern u. s. w., bis ans Ende völlig eben so. Zulezt wenn man die Summen aller einzelnen Zahlreihen auf die beschriebene Art gefunden und in ihre gehörigen Stellen gesezt hat, ziehe man unter sie einen Strich, und addire auch diese auf eben die Art; so erhält man die Summe aller vorgegebenen Zahlen.

Wenn nun folgende Zahlen addirt werden sollten 6789, 7358, 9577, 5968, so müßte dies nach dem bisher Vorgetragenen folgendergestalt geschehen:

6789
7358
9577
5968

32
26
24
27

29692

Eben so wird auch mit folgenden Beyspielen verfahren:

63025
977
9291

13
18
11
12
6

73293

18764
3075
928
9765
43029

31
23
23
23
5

75561

Dieses Verfahren gründet sich auf die wesentliche Einrichtung unseres Vorstellungvermögens, nach welcher wir mit allen unsern Vorstellungen so an das Gesetz der Sucessíon gebunden sind, daß wir von einem, aus mehreren ungleichartigen Theilen zusammengesezten Ganzen uns nicht anders eine angemessene Vorstellung zu verschaffen im Stande sind, als dadurch daß wir solches zuerst successiv von Theil zu Theil durchlaufen und alsdann aus den vorher gebildeten Vorstellungen der Theile die Vorstellung des Ganzen zusammensezen. Da wir nämlich unmöglich auf einmal überschauen, oder durch eine Aeusserung unserer Thätigkeit (uno actu mentis) herausbringen können, wie viel mehrere gegebenen Zahlen, deren jede aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w. besteht zusammen in einer Zahl betragen, so müssen wir uns damit begnügen, solches nach und nach dadurch zu bewerkstelligen, daß wir 1) die gegebenen Zahlen in ihre

ungleichartigen Theile zerlegen; 2) untersuchen, wie viel die ungleichartigen Theile dieser Zahlen von jedem Namen zusammen in einer Zahl betragen, oder die Partialsummen der ungleichartigen Theile von jedem Namen in den gegebenen Zahlen suchen d. h. angeben, wie viel Einer, wie viel Zehner, wie viel Hunderter u. s. w. in den gegebenen Zahlen zusammen vorhanden seyen; 3) die so herausgebrachten Zahlen der ungleichartigen Theile von jedem Namen in eine Zahl zusammen fassen, die sich nun auch durch eine Aeusserung unserer Thätigkeit als ein Ganzes auffassen und darstellen lässet, oder aus den gefundenen Partialsummen die Vorstellung der Totalsumme zusammensezen, d. h. angeben, wie viel die gegebenen Zahlen, nach ihren verschiedenen Theilen von allen und jeden Ordnungen, zusammen in einer Zahl betragen, oder mit andern Worten, wie viel Einer, Zehner u. s. w. die gegebenen Zahlen zusammen in einer Zahl enthalten.

Daß wir aber auf diesem Wege die richtige Summe der gegebenen Zahlen finden müssen, davon sind wir aus dem Grunde überzeugt, weil wir uns bewußt sind, daß wir solchergestalt nichts anders thun, als nach und nach alle Theile der gegebenen Zahlen zusammen nehmen, und es eine Wahrheit ist, von welcher wir unmittelbare Gewißheit haben, daß alle Theile eines Ganzen zusammen genommen immer dem Ganzen selbst gleich seyn müssen.

Indessen würde diese Art zu addiren, besonders wenn der zu addirenden Zahlen sehr viele sind, ziemlich langweilig und beschwerlich seyn. Man hat daher auf eine Abkürzung derselben gedacht, welche auf dem schon mehrmals angeführten Gesetze beruhet, daß in einer Zahlenreihe jede Ziffer, von der rechten Hand gegen die linke gerechnet, in jeder nachfolgenden Stelle einen zehnmal höhern Werth hat, als in der vorhergehenden. Vermöge dieses Gesetzes muß nämlich, so oft die Summe einer Reihe mehr, als neun, beträgt, für jede Zehn ein Einer in die nächst höhere Stelle geschrieben werden. Man kann daher von der Summe einer jeden einzelnen Reihe die höhern Ziffern gleich im Sinne zu der folgenden Reihe übertragen, und so die Summe aller gegebenen Zahlen auf einmal finden, ohne die Summe einer je-

den einzelnen Reihe zuvor besonders hingeschrieben zu haben.

Demnach werden die vorigen Beyspiele kürzer also addirt:

6789	63025	18764
7358	977	3075
9577	9291	925
5968	73293	9765
29692		43929
		75561

Das Zeichen der Addition ist (+) und wird gelesen Plus, das Zeichen der Gleichheit ist (=) und wird gelesen Gleich; wenn man daher anzeigen will, daß zwey Größen zusammen genommen so groß seyen, als eine dritte, z. B. daß 5 und 7 zusammen so viel sey, als 12; so wird dies kurz also geschrieben 5+7=12.

§. 6.

Das Verfahren, wodurch man findet, um wie viel eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene, oder um wie viel eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen unterschieden sey, wird das Subtrahiren genannt. Von den beyden gegebenen Zahlen nennt man die größere den Minuendus, die kleinere den Subtrahendus, und die durch Vergleichung dieser beyden vermittelst des Subtahirens gefundene Zahl, den Rest oder die Differenz.

Das Zeichen der Subtraction ist ein kleiner Querstrich, der zwischen die beyden Größen, deren eine von der andern abgezogen werden soll, gesezt und Minus gelesen wird. Wenn man demnach den Satz, daß der Unterschied der Zahlen 20 und 9 der Zahl 11 gleich sey, kurz ausdrücken will; so kann dies vermittelst der gedachten Zeichen folgendermaßen geschehen: 20—9=11.

Bey dem Subtrahiren hat man nun folgende vier Fälle zu unterscheiden:

I. Können alle Ziffern des Minuendus grösser seyn, als die gleichnamigen Ziffern des Subtrahendus.

II. Können einige Ziffern des Minuendus kleiner seyn, als die gleichnamigen Ziffern des Subtrahendus.

III. Können in dem Minuendus einzelne Nullen zwischen den Ziffern desselben stehen.

IV. Können in dem Minuendus mehrere Nullen unmittelbar auf einander folgen.

Die allgemeine Regel, die man in allen diesen Fällen zu beobachten hat, ist folgende;

Man schreibe die grössere Zahl, oder den Minuendus oben an, und die kleinere, oder den Subtrahendus, darunter, aber so, daß, wie bey der Addition, Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. w., kurz, daß lauter gleichnamige Ziffern untereinander zu stehen kommen, und ziehe alsdann einen Strich darunter. Im ersten Falle nun, wenn alle Ziffern des Minnendus grösser sind, als die darunter stehenden Ziffern des Subtrahendus, nehme man jede Ziffer des Subtrahendus von der darüber stehenden Ziffer des Minuendus weg, und seze den Rest gerade darunter unter den Strich. Z. B.

35792468	9876543
24681357	7654321
11111111	2222222

Daß man auf diese Art den Rest richtig finden müsse, ist aus dem Verfahren selbst offenbar, weil solchergestalt alle Theile der kleinern Zahl einzeln von den gleichnamigen Theilen der grössern Zahl weggenommen werden.

Im zweyten Falle hingegen, wenn einige Ziffern des Minuendus kleiner sind, als die darunter stehenden gleichnamigen Ziffern des Subtrahendus, ziehe man erstlich, so lange man kann, die kleinern Ziffern des Subtrahendus von den grössern des Minuendus ab, wie in Nro. I, geht aber dies nicht mehr an; so nehme man von der nächsthöheren Ziffer des Minuendus eine Einheit weg, und zähle sie zu der niedrigern, von welcher die darunter stehende grössere Ziffer des Subtrahendus abgezogen werden solle; in dieser niedrigern Stelle nun hat diese geborgte Einheit, nach dem schon oft erwähnten Grundge-

setze der Arithmetik einen zehnmal grösern Werth, als in der höhern, sie gilt also hier zehnmal so viel, als 1, das heißt 10, und da die Ziffer, die man abziehen solle, nie größer als 9 ist; so kann man folglich den Abzug allemal verrichten; nur muß man nicht vergessen, daß die Ziffer, von welcher man geborgt hat, um eine Einheit vermindert worden ist, zu welcher Absicht man bey derselben ein Zeichen, etwa einen Punkt, machen kann. Z. B.

97263154	7126354
56945823	6987645
40317331	138709

Was den dritten Fall anbelangt, wenn nämlich im Minuendus einzelne Nullen zwischen den Ziffern desselben stehen; so findet dabey wiederum eine gedoppelte Verschiedenheit Statt. Denn entweder ist die, im Minuendus rechter Hand vor der Nulle stehende, Ziffer grösser, als die darunter stehende gleichnamige Ziffer des Subtrahendus; oder sie ist kleiner, als diese. Ist sie größer, so kann die darunter stehende Zahl ungehindert von ihr abgezogen werden, und man hat nur, wenn man an die Nulle kommt, von der auf sie folgenden höheren Ziffer eine Einheit zu borgen, welche nun in der niedrigern Stelle der Nulle 10 gilt, wie in Nro. II. Ist aber die, vor der Nulle rechter Hand stehende, Ziffer kleiner, als die unter ihr befindliche Ziffer des Subtrahendus, so daß also diese nicht von ihr abgezogen werden kann, so sollte man nun eigentlich von der Nulle borgen; da man aber, wo nichts ist, auch nichts nehmen kann, so geht man zu der nächst folgenden höheren Ziffer fort, borgt von dieser eine Einheit, und trägt sie in die Stelle der Nulle, wo sie nun 10 gilt; von diesen geborgten 10 nimmt man nun wieder eine Einheit weg, und bringt sie zu der nächstniedrigern, rechter Hand vor der Nulle stehenden Ziffer, von welcher man die darunter stehende Ziffer abziehen sollte, aber, weil sie zu klein war, nicht abziehen konnte. In dieser Stelle gilt die geborgte Einheit nun wiederum 10, und der Abzug kann also verrichtet werden; in der Stelle der Nulle aber stehen jezt 9, weil man von der dahin geborgten Einheit, die dort zehn galt, wiederum eins weggenommen hat. Z B.

9750603	8090705
6438542	5739624
3312061	2351081
76080302	50370604
69725437	29705837
6354865	20664767

Im vierten und lezten Falle endlich, wenn im Minuendus mehrere Nullen unmittelbar auf einander folgen, wird bloß das lezte Verfahren des vorhergehenden dritten Falls mehrmals wiederhohlt. Man geht nämlich, weil man von keiner Nulle etwas borgen kann, bis zu der ersten, nach der lezten Nulle stehenden, Ziffer fort, borgt von dieser eine Einheit in die Stelle der vorhergehenden Nulle, wo sie nun 10 gilt, von diesen geborgten 10 nimmt man wieder eins weg, und trägt es in die Stelle der nächstvorhergehenden Nulle, wo es gleichfalls 10 bedeutet, und dieses wiederhohlt man so vielmal, als Nullen vorhanden sind, bis man endlich von den in die Stelle der ersten Nulle geborgten 10 eine Einheit zu der nächstniedrigern Ziffer übertragen, und, weil diese hier nun 10 gilt, den Abzug verrichten kann, und weil man dabey von den 10, die man zu jeder Nulle geborgt hatte, allemal wieder eins wegnahm, so stehet nunmehr an der Stelle einer jeden Nulle die Ziffer 9. Z. B.

75040009	529700003
50263857	269587465
15776152	251112538

Die Richtigkeit des für die lezten drey Fälle angewiesenen Verfahrens gründet sich darauf, daß man eine Zahl aus ihren Theilen verschiedentlich zusammensezen, folglich auch in solche verschiedentlich zerlegen kann, wenn man sie nur alle behält. Wenn man z. B. von 903 abziehen sollte 625; so kann man sagen, es seye $903 = 800 + 90 + 13$, oder man kann die Zahl 903 als aus den Theilen 800, 90 und 13 zusammengesezt betrachten, und dann kann man ja ungehindert 5 Einhei-

ten von 13 Einheiten, 2 Zehner von 9 Zehnern, und 6 Hunderter von 8 Hundertern abziehen. Denn es ist

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 903 & = & 800 & + & 90 & + & 13 \\ \text{und} & 625 & = & 600 & + & 20 & + & 5 \\ \hline \text{also} & 903-625 & = & 200 & + & 70 & + & 8 = 278. \end{array}$$

Man thut also auch bey der Subtraction überall nichts anderes, als daß man dem Naturgesetze der Succession, welchem unsere Vorstellungen unterworfen sind, folgt, und von dem Grundsatze der Gleichheit des Ganzen mit der Summe der Theile eine Anwendung macht.

Da wir nämlich die Differenz zweyer, aus mehreren ungleichartigen Theilen bestehenden, Zahlen eben so wenig, als ihre Summe, durch eine Aeusserung unserer Thätigkeit anzugeben vermögen, so müssen wir uns auch hier begnügen, solches durch mehrere auf einander folgende Aeusserungen derselben nach und nach zu bewerkstelligen, indem wir 1) die gegebenen Zahlen in ihre ungleichartigen Theile zerlegen, 2) hierauf die Differenzen jedes Paars dieser Theile von gleichem Namen, oder die Partialdifferenzen suchen, und endlich 3) diese gefundenen Partialdifferenzen in eine Zahl zusammen fassen, wo wir dann auf ähnliche Art, wie vorhin bey der Summe, davon unmittelbare Gewißheit haben, daß die Differenzen aller Theile zweyer Ganzen zusammen genommen der Differenz beyder Ganzen gleich seyn, oder solche richtig darstellen müssen.

§. 7.

Da wir bey allen unsern Geschäften dem Irren und Fehlen so sehr ausgesezt sind, beym Rechnen aber ein Fehler oft von so großer Wichtigkeit seyn kann; so muß uns daran gelegen seyn, gewisse Mittel kennen zu lernen, wodurch man sich in jedem Falle von der Richtigkeit einer geführten Rechnung versichern kann. Solche Versicherungsmittel nennt man Proben.

Da nun, nach den oben gegebenen Erklärungen, durch die Addition gefunden wird, wie viel mehrere gegebene Zahlen zusammen in einer Zahl ausmachen, und diese Zahl, welche die Summe gnannt wird, allen

gegebenen Zahlen, zusammen genommen, gleich seyn muß; so erhellet, daß, wenn man eine von den gegebenen Zahlen bey dem Addiren wegließe, die Summe gerade um die weggelassene Zahl kleiner werden müßte, als sie sonst geworden seyn würde, wenn man alle gegebenen Zahlen zusammen gezählt hätte. Da ferner durch die Subtraction gefunden wird, um wie viel eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene, die Zahl aber, welche diesen Unterschied ausdrückt, und Differenz genannt wird, mit der kleinern Zahl zusammen, allemal so viel ausmachen muß, als die größere, so erhellet, daß, wenn man die Differenz der weggenommenen kleinern Zahl zusezte, man dadurch die größere wieder herstellen würde. Hieraus fließen nun für die Addition und Subtraction folgende Proben:

Die Probe der Addition wird gemacht, wenn man nach erhaltener Summe die zu addirenden Zahlen noch einmal zusammen zählt, aber so, daß man eine davon, welche man will, ausläßt; ziehet man nun diese neue Summe von der zuerst gefundenen ab, so muß, wenn man richtig gerechnet hat, die bey der zweyten Addition ausgelassene Zahl übrig bleiben.

Hat man aber nur zwey Zahlen zusammen addirt, und möchte gerne die Probe machen; so ziehe man die eine von ihnen, welche man will, von der gefundenen Summe ab, wo alsdann, wenn die Rechnung richtig ist, die andere übrig bleiben muß.

Hingegen, um die Subtraction zu probiren, addirt man die gefundene Differenz zu dem Subtrahendus, wenn alsdann die daraus sich ergebende Summe dem Minuendus gleich ist, so ist die Rechnung richtig. So dienen also Addition und Subtraction einander gegenseitig zu Proben.

Probe der Addition.

260548	7394268
534109	2901753
397654	6085479
821976	3850964
.. . .	....
2014287	20232464
1753739	12838196
260548	7394268

Probe der Subtraction.

.....	.. ..
91023846	821000635
76584967	574632859
14438879	246367776
91023846	821000635

§. 8.

Es ist leicht einzusehen, daß man durch eben das Verfahren, wodurch man findet, wie viel mehrere Zahlen zusammen in einer Zahl ausmachen, auch finden könne, wie viel eine gegebene Zahl betrage, wenn sie mehrmal wiederholt genommen würde. Man dürfte sie nämlich zu dem Ende nur so vielmal, als sie wiederholt genommen werden sollte, zu sich selbst addiren. Da aber dieses Verfahren schon alsdann, wenn eine Zahl nur etliche hundertmal genommen werden sollte, unerträglich weitläufig, beschwerlich und mit vieler Gefahr sich zu verirren verbunden seyn würde, so hat man eine Abkürzung desselben ausgedacht, welche darin besteht, daß man, anstatt alle Ziffern einer Zahl so vielmal, als die Zahl wiederholt genommen werden soll, untereinander zu sezen, und alsdann zu addiren, das geforderte Vielfache einer jeden Ziffer sogleich unter dieselbe hinschreibt, und alsdann nur diese Vielfachen addirt.

Dieses abgekürzte Verfahren wird das Multiplicіren genannt, die Zahl, von welcher man ein Vielfaches finden soll, heißt der Multiplicandus, diejenige hingegen, welche anzeigt, wie vielmal die andere genommen werden solle, der Multiplicator, beyde zusammen werden auch Factoren, die neue Zahl aber, welche man durch dieses Verfahren findet, wird Product genannt.

Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz (×) oder ein Punkt (.), welche zwischen die Factoren gesezt werden; z. B.

$$4.16=64;\ 8\times 9=72;\ 2.3.5=30.$$

Zur Erleichterung des Multiplicirens hat man die Producte, welche die neun einfachen Zahlen, wenn sie

miteinander multiplicirt werden, geben, in eine Tafel gebracht, welche das Einmal Eins genannt wird, und welches man, wenn man im Rechnen nicht aufgehalten werden will, nothwendig dem Gedächtnisse wohl einprägen muß.

Die bequemste Form dieser Tafel ist die nachstehende, und ihr Gebrauch ist folgender:

I. Die ganze Tafel enthält neun wagrechte und eben so viele lothrechte Zahlenreihen.

II. In der obersten wagrechten sowohl, als in der äussersten lothrechten Reihe bey der linken Hand, stehen die neun einfachen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung, so, daß diese beyden Reihen oben bey der linken Hand in der Stelle der 1 einen rechten Winkel miteinander machen.

III. Die große vierseitige Figur, worein die ganze Tafel verzeichnet ist, läßt sich in 64 kleinere vierseitige Figuren zertheilen, worin alle Producte enthalten sind, die sich aus den neun einfachen Zahlen machen lassen, und zwar so, daß in einer jeden dieser vierseitigen Figuren ein Product in dem Gegenwinkel desjenigen Winkels anzutreffen ist, in dessen Oeffnung die 1 steht, die beyden Factoren dieses Produkts aber in den zwey andern Gegenwinkeln dieser vierseitigen Figur sich befinden.

IV. Will man daher das Product zweyer einfachen Zahlen in dieser Tafel aufsuchen, so suche man den einen Factor desselben in der äussersten lothrechten Reihe bey der linken Hand, den andern aber in der obersten wagrechten Reihe. Nun seze man bey dem ersten den Zeigefinger der linken Hand an, und rücke ihn in derselben wagrechten Reihe, an deren Anfang dieser Factor steht, gegen die rechte Hand zu; bey dem andern hingegen seze man den Zeigefinger der rechten Hand an, und führe ihn durch dieselbe lothrechte Reihe, an deren Anfang dieser Factor steht, herab, so wird man in der Ecke, wo die beyden Finger einander begegnen, das gesuchte Product der beyden Factoren

finden. Nach einiger Uebung werden Linien, die man von dem einen Factor in der wagrechten Reihe einwärts nach der rechten Hand zu, und von dem andern in der lothrechten Reihe herunterwärts im Sinne ziehen kann, die Stelle der Finger vertreten können.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 9.

Wenn man nun eine gegebene Zahl mit einer andern gegebenen multipliciren soll, so bestehen entweder beyde nur aus einer Ziffer, oder die eine von beyden aus mehrern, die andere aber aus einer Ziffer, oder es bestehen beyde aus mehreren Ziffern. Der erste Fall, wenn beyde Factoren nur aus einer Ziffer bestehen, hat gar keine Schwierigkeit, denn man findet alsdann das Product unmittelbar in dem Einmaleins, welches man entweder im Kopfe oder bey der Hand haben muß. Z. B. wenn man 9 mit 7 multipliciren, oder angeben soll, wie viel 9 siebenmal genommen ausmache, so findet man sogleich in dem Einmaleins, daß es 63 sey. Im andern Falle hingegen, wenn der eine Factor eine einfache, der andere aber eine zusammengesezte Zahl ist, so sehe man,

da einerley Factoren immer einerley Product geben, man mag sie multipliciren, in welcher Ordnung man will, die zusammengesezte Zahl als den Multiplicandus, die einfache hingegen als den Multiplicator an, seze den leztern unter die niedrigste Ziffer des ersteren, und ziehe darunter einen Strich; nun mache man vermittelst des Einmaleins das Product aus dem Multiplicator in die niedrigste Ziffer des Multiplicandus. Bestehet dieses Product nur aus Einheiten; so seze man die Ziffer, welche es ausdrückt, unter dieselbe niedrigste Ziffer des Multiplicandus, von welcher das Product herrührt. Enthält aber das Product neben den Einheiten auch noch Zehner, so seze man nur die niedrigste Ziffer des Products unter die niedrigste Ziffer des Multiplicandus, die Zehner aber rücke man unter die nächstfolgende höhere Ziffer desselben vor. Nun gehe man zu der zweyten Stelle des Multiplicandus, oder zu den Zehnern, fort, und verfahre mit diesen eben so. Hat man das Product von diesen gefunden, so geht man zur dritten, vierten u. s. w. Stelle des Multiplicandus, oder zu den Hundertern, Tausendern u. s. w. fort, und wiederholt bey allen das nämliche Verfahren; wobey man hauptsächlich das sorgfältig in Acht zu nehmen hat, daß man immer die niedrigste Ziffer des Products unter diejenige Ziffer des Multiplicandus sezt, von welcher es herrührt, die höhere aber um eine Stelle gegen die linke Hand vorrückt. Hat man auf diese Art alle einzelnen Producte, d. h. die Producte aus dem Multiplicator in alle Theile des Multiplicandus, gefunden, so addire man sie zusammen, wo alsdann ihre Summe das ganze Product giebt. Z. B.

57398264
8

32
48
16
64
71
24
56
40

459186112

693452874
7

28
49
56
14
35
28
21
63
42

4854170118

Man siehet leicht, daß dieses Verfahren noch eine weitere Abkürzung zuläßt, welche darin bestehet, daß man, anstatt jedes der einzelnen Producte besonders hinzuschreiben und sie am Ende zu addiren, von jedem nur die niedrigste Ziffer unter diejenige Ziffer des Multiplicandus, von welcher es herrührt schreibt, die höhere Ziffer aber im Sinne behält, und zu dem Producte aus der nächstfolgenden Ziffer des Multiplicandus zählt, mit diesem aber und mit allen nachfolgenden wiederum eben so verfährt. Hierdurch erhält man alsdann das ganze Product auf einmal. Demnach werden nun die vorigen Beyspiele also stehen:

57398264	693452874
8	7
459186112	4854170118

Im dritten Falle, wenn beyde Factoren aus mehrern Ziffern bestehen, verfahre man mit jeder Ziffer des Multiplicators nach dem zweyten Falle, oder man suche, nach der für den zweyten Fall gegebenen Vorschrift, die Producte aus allen Theilen des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus, und schreibe sie so, daß allemal die niedrigste Ziffer eines jeden Products unter diejenige Ziffer des Multiplicators, von welcher das Product herrührt, zu stehen komme, am Ende addire man alle diese Producte zusammen, so giebt ihre Summe das gesuchte ganze Product.

Beyspiele.

679532	69857342
872	576
1359064	419144052
4756724	489001394
5436256	349286710
592551904	40237828992

§. 10.

Wenn bey dem Multipliciren in einem oder in beyden Factoren Nullen vorkommen, so hindern diese die Anwendung der bisher gegebenen Regeln nicht. Sie

kommen nämlich entweder im Multiplicator oder im Multiplicandus, oder in beyden zugleich vor, und in allen diesen Fällen stehen sie entweder am Ende, oder in der Mitte zwischen andern Ziffern. Stehen Nullen im Multiplicandus am Ende, so kann man sie zwar wirklich mit dem Multiplicator multipliciren, allein da das Product einer Nulle durch eine jede Zahl immer wieder eine Nulle ist, weil Nichts durch Wiederholung nie zu Etwas werden kann, sondern immer Nichts bleibt, man mag es wiederholen so oft man will, so kann man die am Ende des Multiplicandus stehenden Nullen bey der Multiplication selbst auch weglassen, und sie bloß dem gefundenen Producte am Ende anhängen, weil sie in diesem Falle doch nur dazu dienen, den Werth der gegen die linke Hand zu nachfolgenden Ziffern des Products zu erhöhen. Die Nullen, die in der Mitte des Multiplicandus stehen, geben, aus dem vorhin angeführten Grunde, im Producte immer auch wieder Nullen, man mag sie multipliciren, mit was für Zahlen man will. Stehen hingegen in dem Multiplicator, und zwar am Ende desselben, Nullen, so können diese bey der Multiplication selbst weggelassen, und erst nachher dem Producte am Ende angehängt werden, weil sie, wie die am Ende des Multiplicandus stehenden Nullen, nur dazu dienen, den Werth der gegen die linke Hand zu nachfolgenden Ziffern des Products zu erhöhen. Haben also beyde Factoren am Ende Nullen, so darf man blos ihre Ziffern in einander multipliciren und dem Producte am Ende so viele Nullen anhängen, als in den beyden Factoren zusammen sind. Stehen endlich in der Mitte des Multiplicators Nullen; so können diese bey der Multiplication ganz übergangen werden, und man hat nur nach der im vorigen §. für den dritten Fall gegebenen allgemeinen Regel die Producte aus allen Ziffern des Multiplicators genau so zu schreiben, daß die niedrigste Ziffer eines jeden unter diejenige Ziffer des Multiplicators, von welcher das Product herrührt, zu stehen komme. Dies alles gründet sich, wie man leicht siehet, darauf, daß die Nullen für sich selbst keinen Wehrt haben, sondern bloß dienen, um anzuzeigen, daß keine Ziffern von den Ordnungen, deren Stellen sie einnehmen, vorhanden seyen.

Beyspiele.

573420
3
1720260

97538642000
57
682770494
487693210
55597025940000

718590000
3690000
646731
431154
215577
2651597100000000

5974000
38500
29870
47792
17922
229999000000

3907058
365
19535290
23442348
11721174
1426076170

80604075
907
564228525
725430675
73107896025

290180300
5070
20312621
14509015
147121412100

7958436
570
55709052
39792180
4536308520

§. 11.

Durch das Subtrahiren lernten wir finden, um wie viel eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene. Allein es kommen sehr oft Fälle vor, wo man wissen sollte, wie vielmal eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene, oder, wie vielmal sich eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen abziehen lasse. Dies könnte nun zwar, wie man leicht einsiehet, auch durch die Subtraction gefunden werden, indem man nämlich die eine Zahl von der andern nach und nach so oft abzöge, bis nichts mehr übrig bliebe. Wenn man z. B. sagen sollte, wie vielmal 25 größer sey als 5, oder wie oft sich 5 von 25 abziehen

lasse, so dürfte man nur 5 von 25 so oft abziehen, als dies anginge. Auf diese Art würde man finden, daß, nachdem der Abzug 5mal nacheinander verrichtet worden, nichts mehr übrig bliebe; man müßte also sagen, 5 lasse sich von 25, 5mal abziehen, oder 25 sey 5mal größer als 5. Allein, wenn man bedenkt, wie beschwerlich und langweilig dieses Verfahren bey etwas großen Zahlen werden müßte, so wird man nicht in Abrede stellen können, daß eine geschickte Abkürzung desselben eine sehr wünschenswerthe Erleichterung wäre. Eine solche Abkürzung hat man nun wirklich ausgedacht, welche sich auf das schon oft angeführte Grundgesetz der Arithmetik, daß der Werth einer Ziffer in einer Zahlenreihe von der rechten gegen die linke Hand zu mit jeder Stelle um das Zehnfache erhöhet wird, gründet, und darinn bestehet, daß man, anstatt eine Zahl von welcher man gerne wissen möchte, wie oft sie sich von einer andern abziehen lasse, wirklich so oft von der lezten abzuziehen, bis nichts mehr übrig bleibt, nicht diese Zahl selbst, sondern sogleich ein Vielfaches von ihr, und zwar ein solches, welches der gegebenen größern Zahl entweder selbst gleich, oder zunächst kleiner ist, als sie, von dieser lezteren abziehet, und sich merkt, was für ein Vielfaches der kleineren Zahl man abgezogen hat. Denn da die Frage, wie vielmal eine Zahl von einer andern sich abziehen lasse, einerley ist mit der: was für ein Vielfaches der einen sich von der andern abziehen lasse, so ist mit der Antwort auf die lezte allemal auch die erste beantwortet, und man findet also auf diese Art leicht auf einmal, was man sonst durch öfteres Wiederholen der nämlichen Arbeit, nicht ohne viele Mühe, suchen müßte. Man sieht aus der bisherigen Beschreibung sogleich, daß dieses Verfahren ebenso eine Abkürzung vom Subtrahiren sey, wie wir vorhin das Multipliciren als eine Abkürzung des Addirens kennen lernten. Diese abgekürzte Art zu subtrahiren nennt man nun das Dividiren; diejenige Zahl, von welcher eine andere so oft abgezogen werden solle, bis nichts mehr übrig bleibt, heißt der Dividendus, diejenige aber, die von einer andern so oft als es geschehen kann, abgezogen werden solle, wird Divisor, und die, welche anzeigt, wie oft der Abzug geschehen könne, Quotient genannt.

Das Zeichen der Division ist ein Querstrich zwischen dem Dividendus und Divisor. Z. B. wenn man anzeigen will, daß die Zahl 63 durch die Zahl 7 dividirt werden solle, so wird dieses so geschrieben $\frac{63}{7}$, und hier heißt alsdann 63 der Dividendus, 7 aber der Divisor, und die Zahl 9, welche man durch die Division findet, der Quotient.

§. 12.

Wenn nun zwey Zahlen gegeben sind, wovon die eine durch die andere dividirt werden soll, so bestehen entweder beyde aus mehreren Ziffern, oder der Dividendus bestehet zwar aus mehreren, der Divisor aber nur aus einer Ziffer, oder es haben beyde nur eine Ziffer. Um mit dem lezten als dem leichtesten Falle anzufangen, so findet man in diesem den Quotienten ohne Mühe, wenn man in dem Einmaleins ein solches Vielfaches des Divisors aufsucht, welches dem Dividendus entweder selbst gleich, oder zunächst kleiner ist, als er, und dieses von dem Dividendus abziehet, wo alsdann die Zahl, welche anzeigt, was für ein Vielfaches des Divisors man von dem Dividendus abgezogen habe, der Quotient ist. Z. B. wenn 9 durch 3 dividirt werden soll, so darf man, da man aus dem Einmaleins weiß, daß dreymal 3 oder das Dreyfache von 3, 9 ist, nur das Dreyfache des Divisors 3, welches 9 ist, von dem Dividendus 9 abziehen, und man erhält zum Quotienten 3, weil man das Dreyfache des Divisors abzog; und weil bey dem Abzug nichts übrig blieb, so muß man sagen, 3 sey in 9 dreymal enthalten, oder 3 lasse sich dreymal von 9 abziehen. Die Rechnung selbst stehet also:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ (3) & \\ \underline{9} & \\ 0 & \end{array}$$

Im zweyten Falle, wenn der Dividendus zwar mehrere, der Divisor aber nur eine Ziffer hat, verfahre man folgendermaßen:

I. Man suche, wie vielmal der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividendus enthalten ist. Dieses ge-

schiehet', indem man aus dem Einmaleins ein solches Vielfaches des Divisors aufsucht, welches der höchsten Ziffer des Dividendus entweder selbst gleich, oder zunächst kleiner ist, als sie.

II. Die Ziffer, welche anzeigt, was für ein Vielfaches dies sey, schreibe man an die Stelle des Quotienten, so zeigt dieser Theil des Quotienten an, wie vielmal der Divisor nach Einheiten von derjenigen Ordnung, von welcher die Einheiten der höchsten Ziffer des Dividendus sind, im Dividendus enthalten sey, z. B. wie viel Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w. des Divisors im Dividendus stecken.

III. Weil aber im Dividendus noch gewisse Mengen des Divisors stecken können, welche sich nicht durch Einheiten von der nämlichen Ordnung, von welcher die Einheiten der höchsten Ziffer des Dividendus sind, ausdrücken lassen, so ziehe man nun das nach Nro. I. gefundene Vielfache des Divisors von der höchsten Ziffer des Dividendus ab.

IV. Zu dem hierdurch gefundenen Reste nehme man die nächstfolgende Ziffer des Dividendus, suche nun wieder nach Nro. I. dasjenige Vielfache des Divisors, welches dieser Zahl, in welche man nun zu dividiren hat, entweder gleich, oder zunächst kleiner ist, als sie, und schreibe abermal in den Quotienten diejenige Ziffer, welche dieses Vielfache anzeigt, so hat man den zweyten Theil des Quotienten. Das vorhin gefundene Vielfache des Divisors ziehe man nun wiederum von der Zahl, in welche man dividirt, ab, so wird man wieder einen Rest behalten.

V. Zu diesem Reste ziehe man nun die nächstfolgende Ziffer des Dividendus herab, und verfahre damit nach Nro. IV.

VI. Diese Arbeit seze man so lange fort, als Ziffern im Dividendus vorhanden sind, so wird man für jede neue Ziffer im Dividendus, die zu dem nächst vorhergehenden Reste genommen wird, eine Ziffer im Quotienten bekommen.

VII. Wenn bey dem Abziehen irgendwo kein Rest bleibt, so rückt man die nachfolgende Ziffer des Quotienten herunter, und wenn der Divisor in dieser, oder in einem Reste und der dazu genommenen Ziffer des Dividendus auch nicht einmal enthalten ist, so schreibt man dafür eine Nulle in den Quotienten und nimmt zu dieser Zahl noch die nächstfolgende Ziffer des Dividendus.

VIII. Wenn der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividendus auch nicht einmal enthalten ist, so nimmt man noch die nachfolgende Ziffer dazu. Z. B.

5) 178980 ⌊ 35796
15
28
25
39
35
48
45
30
30

4) 27368 ⌊ 6842
24
33
32
16
16
8
8

4) 936524 ⌊ 234131
8
13
12
16
16
5
4
12
12
4
4

5) 759235 ⌊ 151847
5
25
25
9
5
42
40
23
20
35
35

Im ersten Falle endlich, wenn sowohl der Divisor als der Dividendus aus mehreren Ziffern besteht, ver-

gleicht man den Divisor nach den obigen Regeln allemal mit so viel Ziffern des Dividendus als er selbst hat. Um diese Vergleichung anzustellen sucht man nur, wie vielmal die erste oder höchste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer des Dividendus enthalten ist, und nimmt an, der ganze Divisor stecke ebensovielmal in den ihm zugehörigen Ziffern des Dividendus. Dies kann nun oft falsch seyn, denn wenn man ein Vielfaches vom Divisor nimmt, so wird fast immer die erste Ziffer desselben durch das, was von den Vielfachen der nachfolgenden Ziffern zu ihr herübergetragen wird, vergrößert, aber der Fehler entdeckt sich bald dadurch, daß das Vielfache des Divisors, welches man abziehen will, grösser wird als der Theil des Dividendus, von dem es abgezogen werden sollte. Alsdann muß man also den Theil des Quotienten, der solchergestalt gefunden werden soll, so lange vermindern, bis sich das Vielfache des Divisors, welches er anzeigt, von der Zahl, in welche man dividirt, abziehen läßt, oder man muß ein solches Vielfaches des Divisors suchen, welches zunächst kleiner ist, als die Zahl, in welche man dividirt. Wenn die höchste Ziffer des Divisors größer ist, als die höchste Ziffer des Dividendus, so nimmt man, wie in Nro. VIII. beym zweyten Falle, noch die nächstfolgende Ziffer desselben dazu. Im übrigen ist das Verfahren ganz einerley mit dem für den zweyten Fall in den Regeln von Nro. I — VIII. vorgeschriebenen.

So lange man noch nicht geübt ist, und besonders bey einem großen Divisor, dient es zur Erleichterung der Arbeit, wenn man den Divisor vorläufig durch alle einfachen Zahlen von 1 bis 9 multiplicirt, und sich also für ihn ein eigenes Einmaleins macht; denn so kann man alsdann gleich sehen, was für ein Vielfaches desselben sich vom Dividendus abziehen lasse, und man erspart sich dadurch alle sonst nicht leicht zu vermeidende Fehler und daraus entstehende Wiederholungen. Z. B. wenn 7936875 durch 25 dividirt werden soll, so mache man sich zuerst ein Einmaleins für den Divisor oder eine Tabelle der Vielfachen von 25;

2 × 25 = 50
3 × 25 = 75
4 × 25 = 100
5 × 25 = 125
6 × 25 = 150
7 × 25 = 175
8 × 25 = 200
9 × 25 = 225

25) 7936875 } 317475
75
43
25
186
175
118
100
187
175
125
125

2 × 34 = 68
3 × 34 = 102
4 × 34 = 136
5 × 34 = 170
6 × 34 = 204
7 × 34 = 238
8 × 34 = 272
9 × 34 = 306

34) 9367238 } 275507
68
256
238
187
170
172
170
238
238

§. 13.

Wenn bey dem Dividiren Nullen vorkommen, so stehen sie entweder im Dividendus, oder im Divisor, oder in beyden zugleich, und in jedem von beyden entweder in der Mitte oder am Ende, oder in der Mitte und am Ende zugleich. Wenn im Dividendus Nullen vorkommen, sie stehen hernach in der Mitte oder am Ende, so ändern sie das im vorigen §. angewiesene Verfahren nicht, und machen überhaupt nicht die geringste Schwierigkeit; denn man rückt sie eben so, wie die Ziffern, nach und nach zu dem jedesmaligen Reste herunter, und dividirt alsdann nach den gegebenen Regeln. Sind im Divisor Nullen in der Mitte, so ändern auch diese

das vorgeschriebene Verfahren im geringsten nicht. Stehen aber im Divisor am Ende Nullen, und im Dividendus lauter Ziffern, so kann die Division unmöglich aufgehen. Alsdann streicht man gleich Anfangs im Dividendus von der rechten gegen die linke Hand so viele Ziffern ab, als im Divisor am Ende Nullen stehen, dividirt hierauf mit den übrigen Ziffern des Divisors, und hängt nach verrichteter Division dem gefundenen Quotienten die zuerst abgeschnittenen Ziffern des Dividendus, mit dem darunter gesezten ganzen Divisor, als einen Rest an. Dieser Fall wird in der Folge noch besonders betrachtet werden. Sind endlich im Divisor und Dividendus am Ende Nullen, es seyen in beyden gleich viel, oder in einem mehr, im andern weniger, so streicht man gegen jede Nulle des Divisors eine Nulle des Dividendus weg, und dividirt alsdann die beyden solchergestalt verkleinerten Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln.

Beyspiele.

12) 60060 | 5005
60
060
60

32) 1728000 | 54000
160
128
128
000

685) 49960749 | 729354
4795
2010
1370
6407
6165
2424
2055
3699
3425
2740
2740

5009) 25065036 | 5004
25045
20036
20036

8004) 724418028 | 90507
72036
40580
40020
56028
56028

58|000) 3710260|000}63970
348
230
174
562
522
406
406
0000

367|00) 3097296500|00}8439500
2936
1612
1468
1449
1101
3486
3303
1835
1835
00000

§. 14.

Die bisher angewiesene Art zu dividiren nennt man, weil dabey die Vielfachen des Divisors unter den Dividendus geschrieben und die nachfolgenden Ziffern des leztern nach und nach zu den erhaltenen Resten heruntergezogen werden, Untersichdividiren; es giebt aber auch noch eine andere Art zu dividiren, wobey man im Ganzen eben so verfährt wie bey der ersten, nur mit dem Unterschiede, daß man die Vielfachen des Divisors in Gedanken abziehet, und alsdann bloß die erhaltenen Reste über die Ziffern des Dividendus, von welchen man abgezogen hat, schreibt: und davon hat dieses Verfahren den Namen Uebersichdividiren bekommen. Es ist leicht einzusehen, daß man durch dieses leztere Verfahren Zeit und Raum gewinnen könne, wenn der Divisor aus wenigen Ziffern bestehet. So sehr es daher in diesem Falle zu

empfehlen ist, so entschieden sind doch dagegen die Vorzüge des Untersichdividirens, so bald der Divisor aus mehr als zwey Ziffern bestehet. Denn weil bey diesem lezteren alle Vielfachen des Divisors ordentlich hingeschrieben werden, so kann man dabey im Multipliciren und Subtrahiren die Fehler leichter vermeiden, und wenn man auch einen gemacht hat, ihn leichter entdekken. Auch dient dies dabey zur Erleichterung, daß, wenn einerley Vielfaches des Divisors mehrmal abgezogen werden muß, man es alsdann schon vor Augen hat.

Beyspiele vom Uebersichdividiren.

4) 5793268 | 1448317

5) 8256833 45 | 1851 3669

7) 365 | 52 1/7

5) 5738 | 1147 4/5

§. 15.

Da oben gezeigt worden ist, daß Addition und Subtraction als entgegengesezte Rechnungsarten, einander wechselsweise zur Probe dienen, so muß dies auch von der Multiplication und Division als blossen Abkürzungen der ersteren gleichmäßig gelten. Da nun ein jedes Product jeden seiner beyden Factoren so oft enthält, als im andern Factor die Einheit enthalten ist, so muß es, wenn es mit dem einen Factor dividirt wird, zum Quotienten den andern Factor geben. Dies ist also die Probe der Multiplication. Und da jeder Dividendus den Divisor so oft enthält, als die Einheit im Quotienten enthalten ist, so muß der Quotient mit dem Divisor multipliciret, den Dividendus zum Product geben. Wäre aber bey der Division ein Rest geblieben, so müßte man denselben noch zu dem Producte aus dem Divisor in den Quotienten addiren, um den Dividendus zu erhalten. Dies ist demnach die Probe der Division.

Beyspiele.

Probe der Multiplication.

365
24
1460
730
8760

1648
56
9888
8240
92288

Probe der Division.

35) 10080 ⌊ 288
70
308
280
280
280

72) 219240 ⌊ 3045
216
324
288
360
360

288
35
1440
864
10080

3045
72
6090
21315
219240

Zweyter Abschnitt.

Von den gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

§. 16.

Es ist oben (§. 1.) gezeigt worden, daß eine Zahl entstehe, indem man Eins oder die Einheit etlichemal wiederholt nehme. Nun ist aber die Einheit, die auf diese Art wiederholt genommen wird, entweder für sich selbst ein Ganzes, wie z. B. ein Thaler, ein Dukaten und dergl., oder sie ist nicht für sich selbst ein Ganzes, sondern nur ein bestimmter Theil eines Ganzen, wie z. B. ein halber Thaler, ein Viertels-Dukaten Wird die erstere Einheit, die für sich selbst ein Ganzes ist, etlichemal wiederholt genommen, so entstehet aus dieser Wiederholung eine ganze Zahl, wie z. B. ein Thaler, sechsmal wiederholt genommen, 6 Thaler giebt. Wird aber die leztere Einheit, die nicht selbst ein Ganzes, sondern nur ein Theil eines andern Ganzen ist, etlichemal wiederholt genommen, so kann auch aus dieser Wiederholung keine ganze Zahl entstehen, wenn man sie nicht gerade so oft, oder zwey- drey- vier- u. s w. mal so oft wiederholt, als das Ganze, wovon sie selbst ein Theil ist, Theile hat; z. B. aus einer Einheit, die der vierte Theil von einem Ganzen oder $\frac{1}{4}$ ist, kann nur dadurch eine ganze Zahl entstehen, daß man sie 4mal oder 2×4, das heißt 8mal oder 3×4 das ist 12mal wiederholt, denn 4mal $\frac{1}{4}$ ist so viel als $\frac{4}{4}$ oder 1; 8mal $\frac{1}{4}$ ist $\frac{8}{4}$ oder 2; 12mal $\frac{1}{4}$ ist $\frac{12}{4}$ oder 3 u. s. w. In al-

len andern Fällen entstehet aus der Wiederholung einer solchen Einheit, die nicht selbst ein Ganzes, sondern nur ein bestimmter Theil eines andern Ganzen ist, entweder eine Zahl, die auch wiederum nur ein Theil eines andern Ganzen ist, wie z. B. wenn $\frac{1}{4}$ dreymal wiederholt wird, die Zahl $\frac{3}{4}$ entstehet, oder es entstehet daraus eine Zahl, die das Ganze selbst ein oder etlichemal, und noch einen Theil davon enthält; z. B. wenn die gebrochene Einheit $\frac{1}{4}$ siebenmal wiederholt wird, so entstehet die gebrochene Zah $\frac{7}{4}$, welche das Ganze selbst einmal und noch ausser= dem $\frac{3}{4}$ von demselben enthält, denn $\frac{7}{4}$ ist so viel als 1 und $\frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$. Wird aber eben die= se gebrochene Einheit $\frac{1}{4}$ neunmal wiederholt, so entstehet daraus die gebrochene Zahl $\frac{9}{4}$, welche das Ganze selbst zweymal und überdies noch $\frac{1}{4}$ von demselben enthält, denn $\frac{9}{4}$ ist so viel als 2 und $\frac{1}{4}$ oder $\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$.

Diese gebrochenen Zählen nennt man nun Brüche, und zwar ächte Brüche, wenn sie nur einen gewissen Theil von einem Ganzen, ein oder etlichemal genommen, wie z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ u. s. w., unächte aber, wenn sie das Ganze selbst, und noch überdies einen gewissen Theil von ihm ein oder etlichemal enthalten, wie z. B. $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{5}$ u. s. w. Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilt sey, wird der Nenner, diejenige hingegen, welche anzeigt, wie oft einer von diesen gleichen Theilen des Ganzen genommen sey, wird der Zähler des Bruchs genannt; und wenn man an= zeigen will, daß ein gewisses Ganzes in 7 gleiche Theile getheilet, und der siebente Theil dreymal genommen sey, oder daß von diesen 7 gleichen Theilen 3 vorhanden seyen, so ziehet man einen Querstrich, und schreibt über den Strich den Zähler 3 und unter denselben den Nenner 7 dieses Bruchs folgenderstalt $\frac{3}{7}$, und diesen Ausdruck lie= set man: drey Siebentel.

§. 17.

Es ist zu manchen Absichten dienlich, die Entste= hung der Brüche noch auf folgende zweyerley Arten zu betrachten:

I. Es ist offenbar, daß, wenn man alle Einheiten ei= ner Zahl in eine bestimmte Anzahl von Theilen

theilte, man dadurch die Zahl selbst, welche immer ihren Einheiten zusammen genommen gleich ist, in eben so viele Theile eintheilen würde. Und diese Division unterscheidet sich von der bisher gebrauchten nur allein darin, daß bey der ersteren der Dividendus auch kleiner seyn kann, als der Divisor, welches bey der leztern nicht angeht. Demnach kann man einen jeden Bruch als den Quotienten betrachten, welcher entsteht, wenn der Zähler des Bruchs durch seinen Nenner dividirt wird. Z. B. $\frac{3}{4}$ Gulden ist der Quotient, welcher entsteht, wenn man 3 Gulden in 4 gleiche Theile theilt; denn der vierte Theil von drey Gulden einmal genommen, ist eben so groß, als der vierte Theil von einem Gulden dreymal genommen.

II. Bey den Zahlen, deren wir uns bisher bedient haben, sahen wir nicht auf die Art der Einheiten, wovon diese Zahlen gewisse Mengen enthielten. Es ist aber leicht einzusehen, daß man beym Rechnen auch zugleich die Art der Einheiten, woraus die Zahlen bestehen, mit in Betrachtung ziehen könne. Solche Zahlen, wobey man auf die Art der Einheiten, woraus sie zusammengesezt sind, nicht achtet, heissen unbenannte Zahlen, solche hingegen, wobey man zugleich auf die Art der Einheiten, woraus sie bestehen, Rücksicht nimmt; heissen benannte Zahlen. So sind z. B. 3, 7, 12, u. d. m. unbenannte, hingegen 3 Pferde, 7 Gulden, 12 Meilen u. dergl. m. benannte Zahlen; denn bey den lezteren ist die Art der Einheit, wovon sie gewisse Mengen enthalten, bestimmt, und man kann sich daher keine andere, als gerade diese, darunter gedenken; bey den ersteren hingegen ist die Art der Einheit unbestimmt gelassen, und man hat daher noch freye Wahl, an ihre Stelle zu sezzen, was für eine man will, oder man kann sich unter den Zahlen 3, 7, 12 u. dergl. Dinge vorstellen, was für welche man will. Einen jeden Bruch kann man sich nun als eine Zahl von der lezten Art, oder als eine benannte Zahl vorstellen, wenn man den Zähler des Bruchs für die Zahl selbst, seinen Nenner aber für den Namen der

Zahl ansiehet. Der Bruch $\frac{3}{5}$ kann daher auch geschrieben werden 3 Fünftel, und ein Ausdruck wie der andere sagt, daß das Ganze in 5 Theile getheilt und von diesen 5 Theilen 3 vorhanden seyen, oder daß 3 Dinge vorhanden seyen, deren jedes ein Fünftel oder der fünfte Theil des Ganzen seye. Ist aber der Name des Ganzen angegeben, worauf der Bruch sich bezieht, oder welchem der Theil zugehört, wovon in dem Bruche ein bestimmtes Vielfaches genommen ist, wie in dem Bruche $\frac{3}{4}$ Centner, so wird der Name für den Zähler des Bruchs durch Combination seines Namens mit jenem Namen des Ganzen gebildet, in dem vorigen Beyspiele also: 3 Viertelscentner.

§. 18.

Unter mehreren Brüchen von einerley Nenner, ist derjenige der größte, welcher den größten Zähler, und derjenige der kleinste, welcher den kleinsten Zähler hat, auch ist derjenige zwey= drey= vier= u. s. w. mal größer, als ein anderer, dessen Zähler zwey= drey= vier= u. s. w. mal größer ist, als der Zähler des andern, und mithin ist auch derjenige zwey= drey= vier= u. s. w. mal kleiner, als ein anderer, dessen Zähler nur der zweyte, dritte, vierte u. s. w. Theil von dem Zähler des andern ist.

Gesezt man habe die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$, so ist der lezte $\frac{9}{10}$ der größte unter ihnen allen, und er ist gerade dreymal so groß, als der erste, $\frac{3}{10}$, und mithin ist dieser dreymal kleiner, als der lezte $\frac{9}{10}$. Dies wird sogleich deutlich seyn, wenn man, wie man nach dem vorigen (§.) mit allen Brüchen richtig thun kann, diese Brüche als benannte Zahlen ansiehet, und sie auch so schreibt. Auf diese Art erhält man 3, 5, 7 und 9 Zehntel, d. h., Dinge, deren jedes ein Zehntel oder der zehnte Theil eines Ganzen ist, und nun ist es gewiß eben so einleuchtend, daß 9 Zehntel größer, als 3, 5 und 7 Zehntel, und daß 9 Zehntel gerade dreymal so groß seyn, als 3 Zehntel, als es einleuchtend ist, daß 9 Gulden größer, als 3, 5 und 7 Gulden, und daß sie gerade dreymal so groß seyn, als 3 Gulden. Die Zahlen 3, 5, 7 und 9 drücken hier beyderseits Dinge von einerley

Art aus, nämlich das eine mal Gulden, das andere mal Zehntel; demnach ist nothwendig diejenige unter ihnen die größte, in welcher die Einheit am öftesten wiederholt ist, oder welche die größte Menge von Einheiten enthält, und diejenige ist zwey= drey= u. s. w. mal so groß, als eine andere, welche eine zwey= drey= u. s. w. mal so große Menge von Einheiten enthält, als diese andere; und mithin ist auch diejenige zwey= drey= u. s. w. mal kleiner, als eine andere, deren Einheiten nur dem zweyten — dritten u. s. w. Theile von den Einheiten der andern gleich sind.

Hingegen unter mehreren Brüchen von einerley Zähler ist derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner und derjenige der kleinste, welcher den größten Nenner hat; auch ist derjenige zwey= drey= vier u. s. w. mal größer, als ein anderer, dessen Nenner zwey= drey= vier= u. s. w. mal kleiner ist, als der Nenner des andern; derjenige aber zwey= drey= vier= u. s. w. mal kleiner, als ein anderer, dessen Nenner zwey= drey= vier= u. s. w. mal größer ist, als der Nenner des andern. Z. B. unter den Brüchen $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{15}$ ist der erste $\frac{4}{5}$ der größte, und der lezte $\frac{4}{15}$ der kleinste, auch ist der erste $\frac{4}{5}$ zweymal so groß, als der dritte $\frac{4}{10}$, und dreymal so groß, als der vierte $\frac{4}{15}$, und mithin ist auch der dritte $\frac{4}{10}$ zweymal — und der vierte $\frac{4}{15}$ dreymal kleiner, als der erste $\frac{4}{5}$.

Man wird keine Schwierigkeit finden, dies einzusehen, wenn man sich wiederum nach dem vorigen (§.) alle diese Brüche als benannte Zahlen, und ihre Nenner als die Namen dieser Zahlen vorstellt, welche die Art der Einheit bezeichnen, wovon diese Zahlen gewisse Mengen enthalten, als in dem gegenwärtigen Falle, Fünftel, Achtel, Zehntel und Fünfzehntel des Ganzen. Man vergleiche nun diese Arten der Einheiten unter sich, so wird man bald einsehen, daß eine Einheit, die ein Fünftel, oder der fünfte Theil eines Ganzen ist, größer seyn müsse, als eine solche, die nur ein Achtel, Zehntel oder Fünfzehntel, d. h., der achte, zehnte oder fünfzehnte Theil eben dieses Ganzen ist, und daß ein Fünftel eines Ganzen zweymal so groß sey, als ein Zehntel und dreymal so groß als ein Fünfzehntel eben dieses

Ganzen; und daß mithin ein Fünfzehntel nur der dritte Theil und ein Zehntel nur die Hälfte eines Fünftels von ebendemselben Ganzen sey. Und hieraus wird man von selbst den Schluß machen müssen, daß die Größe der Einheit, deren Arten die Nenner der Brüche bezeichnen, überhaupt von der Zahl der Theile abhange, in welche das Ganze, worauf sie sich beziehet, getheilt worden ist, und daß also, wenn man ein Ganzes zuerst in irgend eine beliebige Anzahl, und hernach in eine zwey= drey= viermal so große Anzahl gleicher Theile theilt, die Einheit eines Theils von der ersten Theilung die größte, und zwey= drey= viermal so groß sey, als die Einheit eines Theils von der zweyten, dritten, vierten Theilung, und daß folglich die leztere zwey= drey= viermal kleiner sey, als die erstere. Was aber von diesen Einheiten selbst gilt, das gilt auch von den Zahlen, welche entstehen, wenn man von ihnen allen Gleichvielfaches nimmt, weil dadurch die Größe der einen, in Ansehung der andern nicht verändert wird; ist also $\frac{1}{5}$ größer als $\frac{1}{15}$, so ist auch $\frac{4}{5}$ größer, als $\frac{4}{15}$, und ist $\frac{1}{5}$ dreymal so groß, als $\frac{1}{15}$, so ist auch $\frac{4}{5}$ dreymal so groß, als $\frac{4}{15}$, und folglich ist umgekehrt, da $\frac{1}{15}$ dreymal kleiner, als $\frac{1}{5}$ ist, auch $\frac{4}{15}$ dreymal kleiner, als $\frac{4}{5}$.

Man stelle sich, um die Sache noch deutlicher einzusehen, vor, das Ganze, worauf sich die Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{15}$, beziehen, sey 1 Gulden, so ist $\frac{1}{5}$ Gulden = 12 Kreuzer, oder 1 Zwölfkreuzerstück, also $\frac{4}{5}$ Gulden = 4 Zwölfkreuzerstücken, $\frac{1}{10}$ Gulden aber ist = 6 Kreuzer, oder 1 Sechskreuzerstück, mithin $\frac{4}{10}$ Gulden = 4 Sechskreuzerstücken, endlich $\frac{1}{15}$ Gulden = 4 Kreuzer oder = 1 Bazen, folglich $\frac{4}{15}$ Gulden = 4 Bazen. Demnach ist $\frac{4}{5}$ Gulden = 12 Bazen, 2mal so viel, als $\frac{4}{10}$ Gulden = 6 Bazen und dreymal so viel, als $\frac{4}{15}$ Gulden = 4 Bazen.

§. 19.

Das, was so eben erwiesen worden ist, führt uns nun auf folgende neue und wichtige Lehrsätze von den Brüchen.

I. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so kann dies auf zweyerley Arten gesche=

hen, entweder dadurch, daß man den Zähler des Bruchs mit dieser Zahl multiplicirt, oder dadurch, daß man seinen Nenner mit eben dieser Zahl dividirt.

Denn da nach dem vorigen (§.) ein Bruch bey einerley Nenner um so viel größer ist, je größer sein Zähler, und bey einerley Zähler um so viel größer, je kleiner sein Nenner ist, so wird allerdings ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, d. h., er wird um so vielmal größer gemacht, als er vorher war, wie vielmal diese Zahl die Einheit enthält, wenn man entweder bey unverändertem Nenner seinen Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, oder bey unverändertem Zähler seinen Nenner mit der ganzen Zahl dividirt. Soll z. B. der Bruch $\frac{9}{15}$ mit der Zahl 3 multiplicirt werden, so erhält man, wenn man seinen Zähler 9 mit dieser Zahl multiplicirt, den Bruch $\frac{27}{15}$, dividirt man aber seinen Nenner 15 durch eben diese Zahl 3, so erhält man den Bruch $\frac{9}{5}$. Allein diese beyden Brüche $\frac{27}{15}$ und $\frac{9}{5}$ sind einander gleich, denn bey dem ersten ist zwar das Ganze in dreymal mehr Theile getheilt, und folglich ist auch jeder einzelne Theil dreymal kleiner, als bey dem lezten, aber von diesen dreymal kleineren Theilen sind auch in dem ersten $\frac{27}{15}$ gerade dreymal so viel genommen, als in dem lezten Bruch $\frac{9}{5}$ von den dreymal größerer Theilen des Ganzen genommen sind.

II. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt werden, so kann dies auch auf zweyerley Arten geschehen, nämlich entweder dadurch, daß man den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt, oder dadurch, daß man seinen Nenner durch diese Zahl multiplicirt.

Denn da nach dem vorigen (§.) ein Bruch bey einerley Nenner um so viel kleiner ist je kleiner sein Zähler, und bey einerley Zähler um so viel kleiner, je größer sein Nenner ist, so wird immer ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt, d. h., er wird um so vielmal kleiner gemacht, als er vorher war, wie vielmal diese ganze Zahl die Einheit enthält, wenn

man entweder bey unverändertem Nenner seinen Zähler mit der ganzen Zahl dividirt, oder bey unveränderten Zähler seinen Nenner mit dieser Zahl multiplicirt. Wenn z. B. der Bruch $\frac{12}{16}$ durch die Zahl 4 dividirt werden soll und man dividirt wirklich seinen Zähler 12 durch die Zahl 4, so erhält man den Bruch $\frac{3}{16}$, multiplicirt man aber seinen Nenner 16 mit eben dieser Zahl 4, so erhält man den Bruch $\frac{12}{64}$, und diese beyden Brüche $\frac{3}{16}$ und $\frac{12}{64}$ sind wiederum einander gleich, denn bey dem ersteren ist zwar das Ganze in viermal weniger Theile getheilt, und jeder dieser einzelnen Theile ist folglich auch viermal größer, als bey dem lezteren, dagegen aber sind auch von den viermal grösseren Theilen des ersteren Bruchs $\frac{3}{16}$ gerade viermal weniger genommen, als von den viermal kleineren Theilen des lezteren Bruchs $\frac{12}{64}$.

III. Ein Bruch behält seinen Werth unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt.

Nach dem vorigen (§.) wird ein Bruch um so vielmal größer, wie vielmal größer man bey einerley Nenner seinen Zähler macht, und er wird im Gegentheil um so vielmal kleiner, wie vielmal grösser man bey einerley Zähler seinen Nenner macht. Macht man daher den Zähler und den Nenner eines Bruchs beyde gleichvielmal größer, d. h., multiplicirt man seinen Zähler und Nenner mit einerley Zahl, so wird der Bruch durch die erste Veränderung, nämlich durch die Multiplication des Zählers, gerade um so vielmal größer, wie vielmal er durch die zweyte Veränderung, nämlich durch die Multiplication des Nenners, kleiner gemacht wird, und folglich bleibt er in der That unverändert. Z. B. wenn der Bruch $\frac{3}{5}$ im Zähler und Nenner mit der Zahl 5 multiplicirt wird, so wird daraus $\frac{15}{25}$ und dieser Bruch ist dem vorigen am Werthe vollkommen gleich, denn der Bruch $\frac{3}{5}$ wurde zwar dadurch, daß man seinen Zähler 3 mit der Zahl 5 multiplicirte, 5mal größer gemacht, weil nun $\frac{1}{5}$ des Ganzen 5 × 3mal, d. h., 15mal

genommen wurde, anstatt daß es vorhin nur 3mal genommen war; allein diese Vergrößerung wurde dadurch wieder aufgehoben, daß man auch den Nenner 5 des Bruchs $\frac{3}{5}$ mit eben dieser Zahl multiplicirte, denn dadurch wurde nun das Ganze in $5 \times 5 = 25$ Theile getheilt, anstatt daß es vorhin nur in 5 solcher Theile getheilt war. Da also durch diese Multiplication des Bruchs $\frac{3}{5}$ mit der Zahl 5 auf der einen Seite zwar fünfmal mehr Theile von dem Ganzen genommen wurde, aber auf der andern Seite jeder von diesen fünfmal mehreren Theilen auch fünfmal kleiner gemacht wurde, so mußte nothwendig der Bruch seinem Werthe nach unverändert bleiben.

Nach eben dem vorigen (§.) wird auch ein Bruch um so vielmal kleiner gemacht, um wie vielmal kleiner man bey einerley Nenner seinen Zähler macht; und er wird im Gegentheil um so vielmal größer, um wie vielmal kleiner man bey einerley Zähler seinen Nenner macht. Wird also der Zähler und Nenner eines Bruchs gleich vielmal kleiner gemacht, d. h., wird der Zähler und der Nenner eines Bruchs durch einerley Zahl dividirt, so wird der Bruch durch die erste Veränderung, nämlich durch die Division des Zählers, um so vielmal kleiner gemacht, um wie vielmal er durch die zweyte Veränderung, nämlich durch die Division des Nenners, wiederum größer gemacht wird, und folglich muß er im Grunde unverändert bleiben. Z. B. wenn der Bruch $\frac{9}{21}$ durch die Zahl 3 im Zähler und Nenner dividirt wird, so erhält man daraus den Bruch $\frac{3}{7}$ und dieser ist dem vorigen vollkommen gleich. Denn dadurch daß man den Nenner 21 mit der Zahl 3 dividirte, wurde zwar der Bruch selbst dreymal größer gemacht, indem das Ganze, worauf er sich beziehet, in dreymal weniger Theile getheilt, und folglich jeder von den Theilen des Ganzen, die er enthält, dreymal größer gemacht wurde, als vorhin. Diese Vergrößerung aber wurde dadurch wieder aufgehoben, daß man auch den Zähler 9 dieses Bruchs mit eben dieser Zahl 3 dividirte, indem solchergestalt von den Theilen des Ganzen, worauf sich der Bruch beziehet, dreymal weniger genommen wurden, als vorhin. Wenn also ein Bruch im Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirt wird, so wird zwar das Ganze, worauf sich der

Bruch beziehet, dadurch in so viel weniger Theile getheilt, und jeder einzelne Theil, folglich auch der ganze Bruch wird dadurch um so vielmal größer, wie vielmal die ganze Zahl, womit man ihn dividirt hat, die Einheit enthält. Aber er wird auf der andern Seite zugleich dadurch wieder um eben so vielmal kleiner gemacht, daß man nun von seinen größeren Theilen gerade so vielmal weniger nimmt, wie vielmal größer man sie gemacht hat, und folglich bleibt der Bruch seinem Werthe nach unverändert.

§. 20.

Aus Nro. I. des vorigen (§.) fließen nun wiederum folgende neue Sätze:

I. Wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, so ist das Product dem Zähler gleich.

Denn nach Nro. I. des vorigen (§.) wird ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, wenn man seinen Zähler damit multipliciret. Wird aber der Zähler eines Bruchs mit seinem Nenner multiplicirt, so wird, da der Nenner jedesmal anzeigt, in wie viel Theile das Ganze, worauf sich der Bruch beziehet, getheilt worden sey, der Zähler hingegen angiebt, wie viel von diesen Theilen vorhanden seyen, jeder der durch den Zähler angegebenen Theile des Ganzen gerade so vielmal genommen, in wie viel Theile das Ganze selbst getheilt worden ist, und folglich muß man dadurch eine Anzahl von Theilen des Ganzen erhalten, die das Ganze selbst so oft enthält, als der Zähler die Einheit; das Product also, das man auf diese Art erhält, muß dem Zähler selbst am Werthe gleich seyn. Denn da alle Theile eines Ganzen zusammen genommen, dem Ganzen selbst gleich sind, so muß auch das Zweyfache, Dreyfache und überhaupt jedes Vielfache aller Theile des Ganzen dem Zweyfachen, Dreyfachen und überhaupt jedem Gleichvielfachen des Ganzen selbst gleich seyn. Z. B. wenn man den Bruch $\frac{3}{8}$ mit seinem Nenner 8 multiplicirt, so erhält man den Bruch $\frac{24}{8}$, dieser aber

ist dem Zähler 3 des vorigen Bruchs gleich, denn er enthält die 3 Achtel des Ganzen 8mal genommen, oder welches einerley ist, die 8 Theile, worin das Ganze getheilt worden ist, und folglich auch das Ganze selbst 3mal. Daß der Bruch $\frac{24}{8}$ der Zahl 3 gleich sey, erhellet auch daraus, wenn man, wie nach (§. 17.) Nro. I. richtig geschehen kann, diesen Bruch als einen Quotienten betrachtet, der entstehet, wenn man seinen Zähler mit seinem Nenner dividirt; denn wenn man hier die Division wirklich verrichtet, so erhält man zum Quotienten die Zahl 3.

II. Eine jede ganze Zahl ist einem Bruche gleich, dessen Zähler das Product der ganzen Zahl in seinen Nenner ist.

Denn da nach Nro. I. ein Bruch, wenn er mit seinem Nenner multiplicirt wird, ein Product giebt, das seinem Zähler gleich ist, so darf man, wenn man aus einer ganzen Zahl einen Bruch machen will, der ihr gleich sey, nur diese ganze Zahl als den Zähler des Bruchs ansehen, ihm nach Belieben einen Nenner geben, und hernach den Bruch mit diesem beliebig angenommenen Nenner multipliciren. Z. B. wenn aus der Zahl 7 ein ihr gleicher Bruch gemacht werden soll, so kann dies auf unzählig vielerley Arten geschehen, man wähle z. B. die Zahl 9, betrachte die Zahl 7 als den Zähler des Bruchs, seze die 9 darunter, und multiplicire nun diesen Bruch $\frac{7}{9}$ mit seinem Nenner 9, so erhält man den Bruch $\frac{63}{9}$ und dieser ist nicht mehr und nicht weniger als die Zahl 7, welches man gleich finden kann, wenn man nach (§. 17.) den Zähler 63 dieses Bruchs als Dividendus, seinen Nenner 9 aber als Divisor ansiehet, und die Division wirklich verrichtet.

§. 21.

Sollen mehrere Brüche von einerley Nenner addirt werden, so darf man nur ihre Zähler addiren, und der

Summe derselben den gegebenen gemeinschaftlichen Nenner untersezen.

Daß man auf diese Art die richtige Summe der gegebenen Brüche erhalte, ist leicht einzusehen, wenn man sich nach (§. 17.) Nro. II. dieselbigen als benannte Zahlen vorstellt, indem man ihre Nenner als die Namen der Zähler ansieht. Denn da die Nenner gleich sind, so sind demnach die Zähler lauter Dinge von einerley Art, und man darf also, um ihre Summe zu finden, sie nur, wie jede andere Dinge von einerley Art, schlechthin zusammenzählen, und ihre Summe bekommt den gemeinschaftlichen Nenner derselben zum Namen. Wenn z. B. die Brüche $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, addirt werden sollen, so sehe man sie als benannte Zahlen an, und schreibe sie also, 3 + 5 + 7 Achtel, und es ist eben so einleuchtend, daß diese 3 + 5 + 7 Achtel zusammen 15 Achtel ausmachen, als es einleuchtend ist, daß 3 + 5 + 7 Gulden zusammen 15 Gulden betragen.

§. 22.

Sollen zwey Brüche von einerley Nenner von einander abgezogen werden, so darf man nur den Zähler des kleinern vom Zähler des größern abziehen, und der gefundenen Differenz den gegebenen gemeinschaftlichen Nenner untersezen.

Daß der so gefundene Bruch der Differenz der gegebenen Brüche gleich sey, erhellet wiederum daraus, daß man nach (§. 17.) die gegebenen Brüche als benannte Zahlen ansehen kann. Denn wenn man sie so betrachtet, so ist offenbar, daß man, da ihr gemeinschaftlicher Nenner anzeigt, daß sie Dinge von einerley Art seyen, eben so, wie man bey jeden andern Dingen von einerley Art verfahren muß, um ihre Differenz zu finden, nur das kleinere von größeren abziehen, und der Differenz eben den Namen, den beyde gleichartigen Dinge vorhin schon hatten, geben dürfe. Z. B. wenn von dem Bruch $\frac{21}{54}$ der Bruch $\frac{17}{54}$ abgezogen werden soll, so sehe man diese beyde Brüche als benannte Zahlen an, und schreibe sie also: 21 Vierundfünfzigstel, 17 Vierundfünfzigstel, und es ist eben so klar, daß 17 Vierundfünfzigstel, wenn sie

von 21 Vierundfünfzigstel abgezogen werden, 4 Vierundfünfzigstel übrig lassen, als es klar ist, daß wenn man von 21 Ellen 17 Ellen abschneidet, 4 Ellen übrig bleiben.

§. 23.

Aber nicht so leicht geht die Addition und Subtraction der Brüche von statten, wenn sie verschiedene Nenner haben, und doch ist dies gerade der Fall, der in Rechnungen bey weitem am häufigsten vorkommt. Es fragt sich also, wie man alsdann zu verfahren habe? Zuerst fällt es nun, wenn man sich nur erinnert, daß nach (§. 17.) alle Brüche als benannte Zahlen anzusehen seyen, so daß ihre Zähler die Zahlen selbst, ihre Nenner aber die Namen derselben vorstellen, sogleich in die Augen, daß Brüche von verschiedenen Nennern nichts anders bezeichnen, als gewisse Mengen von Dingen verschiedener Arten, und daß sie, so lange sie diese Bedeutung haben, unmöglich weder zu einander addirt, noch von einander abgezogen werden können, weil diese beyden Veränderungen nur allein mit Dingen von einerley Art vorgenommen werden können. Soll also die Aufgabe: die Summe oder den Unterschied zweyer Brüche von verschiedenen Nennern zu finden, aufgelößt werden, so ist das erste was man zu thun hat, um sich zur Auflösung den Weg zu bahnen, und wodurch auch die Auflösung allein möglich wird, das, daß man suchen muß, zu machen, daß sie einerley Nenner bekommen, oder sie auf einnerley Benennung zu bringen. Nun weiß man aus der Lehre der Multiplication mit ganzen Zahlen her, daß einerley Factoren immer einerley Product geben, man mag sie multipliciren in welcher Ordnung man will. Macht man hievon die Anwendung auf gegenwärtige Aufgabe, so ist leicht einzusehen, daß zwey Brüche von verschiedenen Nennern einerley Nenner bekommen würden, wenn man den Nenner eines jeden mit dem Nenner des andern multiplicirte. Denn hierdurch würden ihre Nenner zu Producten aus einerley Factoren folglich einander gleich gemacht. Allein, wenn man dies nur so schlechthin thun wollte, so würden beyde Brüche dadurch, daß man das Ganze, worauf sie sich beziehen, in viel mehrere Theile theilte, (nach §. 18.) um eben so vielmal kleiner gemacht, und

man würde, wenn man alsdann ihre Summe oder Differenz suchen wollte, die Summe oder Differenz von zwey viel kleinern, folglich von ganz andern, als den gegebenen Brüchen finden. Soll also, jener Veränderung ungeachtet, der Werth der gegebenen Brüche unverändert bleiben, so muß man (nach §. 19. Nro. III.) auch ihre Zähler mit eben den Zahlen multipliciren, womit man, um sie auf einerley Nenner zu bringen, ihre Nenner multipliciren mußte. Und daher fließt dann die Regel: wenn zwey gegebene Brüche von verschiedenen Nennern auf einerley Nenner gebracht werden sollen, so multiplicire man einen jeden im Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern; oder man multiplicire den Zähler eines jeden mit dem Nenner des andern, und gebe ihnen das Product aus den Nennern beyder zum gemeinschaftlichen Nenner.

Es ist leicht einzusehen, daß eben das, was so eben von zwey Brüchen gesagt worden ist, auch von allen möglichen Brüchen gelte, man mag ihre Anzahl so groß annehmen, als man will. Hat man aber einmal auf diese Art die gegebenen Brüche auf einerley Nenner gebracht, so kann alsdann ihre Summe oder Differenz nach den beyden vorigen §§. ohne Mühe gefunden werden.

Es seyen zu addiren die Brüche

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$;
$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \end{array}\right\} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$$

$\frac{6}{10} + \frac{9}{11}$;
$$\left.\begin{array}{l} \frac{6}{10} = \frac{6 \times 11}{10 \times 11} = \frac{66}{110} \\ \frac{9}{11} = \frac{9 \times 10}{11 \times 10} = \frac{90}{110} \end{array}\right\} = \frac{66+90}{110} = \frac{156}{110}$$

$\frac{7}{8} + \frac{5}{9}$;
$$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{8} = \frac{7 \times 9}{8 \times 9} = \frac{63}{72} \\ \frac{5}{9} = \frac{5 \times 8}{9 \times 8} = \frac{40}{72} \end{array}\right\} = \frac{63+40}{72} = \frac{103}{72}.$$

$\frac{5}{9} + \frac{7}{11} + \frac{9}{11} = \frac{2661}{1485}$, denn es ist:

der Zähler des Isten Bruchs $= 5 \times 11 \times 15 = 825$
= = = = IIten = $= 7 \times 9 \times 15 = 945$
= = = = IIIten = $= 9 \times 9 \times 11 = 891$

Demnach die Summe aller Zähler $= 2661$

gemeinschaftlicher Nenner $= 9 \times 11 \times 15 = 1485$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{9} = \frac{2436}{864}$, denn es ist:

der Zähler des Isten Bruchs $= 2 \times 4 \times 8 \times 9 = 576$
= = = = IIten = $= 3 \times 3 \times 8 \times 9 = 648$
= = = = IIIten = $= 5 \times 3 \times 4 \times 9 = 540$
= = = = IVten = $= 7 \times 3 \times 4 \times 8 = 672$

Demnach die Summe aller Zähler $= 2436$

gemeinschaftlicher Nenner $= 3 \times 4 \times 8 \times 9 = 864$

Soll von dem Bruch $\frac{7}{10}$ der Bruch $\frac{2}{7}$ abgezogen werden, so stehet die Rechnung also:

$\frac{7}{10} - \frac{2}{7}$;

$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{10} = \frac{7 \times 7}{10 \times 7} = \frac{49}{70} \\ \frac{2}{7} = \frac{2 \times 10}{7 \times 10} = \frac{20}{70} \end{array}\right\} = \frac{49 - 20}{70} = \frac{29}{70}$

$\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$;

$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{4 \times 8}{5 \times 8} = \frac{32}{40} \\ \frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40} \end{array}\right\} = \frac{32 - 15}{40} = \frac{17}{40}$

§. 24.

Sollen zwey Brüche miteinander multiplicirt werden, so ist offenbar, daß, wenn man den Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators multipliciren wollte, man ein viel zu großes Product erhalten würde, denn man sollte ja nicht den einen Bruch mit so viel Ganzen multipliciren, als der Zähler des andern anzeigt, sondern nur mit so viel Theilen eines Ganzen, als der Zähler des andern Bruchs anzeigt, und deren Größe der Nenner desselben bestimmt. Dieses Product würde also gerade um eben so vielmal zu groß seyn, wie vielmal in dem Nenner des Multiplicators die Einheit

enthalten ist. Um also das verlangte Product richtig zu erhalten, müßte man das zuerst gefundene um so vielmal kleiner machen, um wie vielmal zu groß es gefunden wurde, man müßte es also mit dem Nenner des Multiplicators dividiren. Demnach wird ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt, wenn der Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators multiplicirt, und das Product durch den Nenner des leztern dividirt wird. Da nun (nach §. 19. Nro. I. und II.) ein Bruch durch eine ganze Zahl auf zweyerley Art multiplicirt und dividirt werden kann, so kann folglich ein Bruch durch einen andern Bruch auf viererley Art multiplicirt werden; nämlich

I. Wenn man bey unverändertem Nenner des Multiplicandus den Zähler desselben mit dem Zähler des Multiplicators multiplicirt, und das Product durch den Nenner des lezteren dividirt.

II. Wenn man den Nenner des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators und den Zähler des Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplicators dividirt.

III. Wenn man bey unverändertem Zähler des Multiplicandus den Nenner desselben mit dem Zähler des Multiplicators dividirt und den Quotienten mit dem Nenner des lezteren multiplicirt.

IV. Wenn man den Zähler des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators und den Nenner des Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplicators, oder kürzer, wenn man von beyden Brüchen Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

Von diesen viererley Verfahrensarten aber ist, wenn man durch die Multiplication der gegebenen Brüche unmittelbar einen Bruch zu bekommen sucht, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen seyen, (wie man dann dies gemeiniglich sucht, da sich der Werth solcher Brüche, deren Zähler und Nenner auch wieder aus gebrochenen Zahlen bestehen, nimmer so leicht übersehen läßt) nur die lezte in allen Fällen anwendbar. Z. B.

$\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{40}$; $\frac{11}{15} \times \frac{17}{23} = \frac{187}{345}$; $\frac{37}{49} \times \frac{51}{75} = \frac{1887}{3675}$.

Wenn $\frac{16}{64}$ mit $\frac{4}{8}$ zu multipliciren ist, so ist das Product:

nach Nro I. $= \frac{8}{64}$,
nach Nro II. $= \frac{2}{16}$,
nach Nro III. $= \frac{16}{128}$,
nach Nro IV. $= \frac{64}{512}$.

Alle diese Brüche aber sind einander gleich, indem jeder $= \frac{2}{16}$ oder $\frac{1}{8}$ ist, wie man leicht findet, wenn man den ersten mit der Zahl 8, den zweyten mit der Zahl 2, den dritten mit der Zahl 16, und den vierten mit der Zahl 64 im Zähler und Nenner dividirt.

§. 25.

Sollen zwey Brüche mit einander dividirt werden, so ist leicht einzusehen, daß, wenn man den Dividendus mit dem Zähler des Divisors dividiren wollte, man einen viel zu kleinen Quotienten erhalten würde, denn man sollte nicht den einen Bruch mit so viel Ganzen dividiren, als der Zähler des andern anzeigt, sondern nur mit so viel Theilen eines Ganzen, als der Zähler des andern anzeigt, und deren Größe der Nenner desselben bestimmt. Dieser Quotient würde also gerade uu so vielmal zu klein seyn, wie vielmal in dem Nenner des Divisors die Einheit enthalten ist. Um also den gesuchten Quotienten richtig zu erhalten, müßte man den zuerst gefundenen um so vielmal größer machen, um wie vielmal zu klein er vorhin gefunden wurde, man müßte ihn also mit dem Nenner des Divisors multipliciren. Demnach wird ein Bruch mit einem Bruche dividirt, wenn man den Dividendus mit dem Zähler des Divisors dividirt, und den Quotienten mit dem Nenner des lezteren multiplicirt. Da nun (nach §. 19. Nro. I. und II.) ein Bruch auf zweyerley Art durch eine ganze Zahl multiplicirt und dividirt werden kann; so kann folglich ein Bruch durch einen Bruch auf viererley Art dividirt werden; nämlich

I. Wenn man bey unverändertem Nenner des Dividendus den Zähler desselben mit dem Zähler des Divisors dividirt und den Quotienten durch den Nenner des lezteren multiplicirt.

II. Wenn man bey unverändertem Zähler des Dividendus den Nenner desselben mit dem Zähler des Divisors multiplicirt, und das Product durch den Nenner des lezteren dividirt.

III. Wenn man den Zähler des Dividends mit dem Zähler des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Nenner des Divisors dividirt.

IV. Wenn man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors, oder kürzer, wenn man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

Von diesen vier Verfahrensarten ist aber, wenn man die Absicht hat, durch die Division der gegebenen Brüche sogleich einen Bruch zu bekommen, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen seyen, wie man dann aus dem im vorigen §. angegebenen Grunde diese Absicht gewöhnlich hat, nur die vierte in allen Fällen anwendbar. Wenn z. B. der Bruch $\frac{12}{48}$ durch den Bruch $\frac{3}{8}$ dividirt werden soll, so ist der Quotient

nach Nro I. $= \frac{32}{48}$,
nach Nro II. $= \frac{12}{18}$,
nach Nro III. $= \frac{4}{6}$,
nach Nro IV. $= \frac{96}{144}$.

Jeder dieser Brüche aber ist dem Bruche $\frac{4}{6}$ gleich, welches man findet, wenn man den ersten mit der Zahl 8, den zweyten mit der Zahl 3, den vierten mit der Zahl 24 im Zähler und Nenner dividirt. Der Ausdruck von dem Werthe des Bruches $\frac{4}{6}$ läßt sich noch weiter, im Zähler und Nenner, nämlich durch 2, dividiren, und folglich ist jeder der vier Brüche dem Bruch $\frac{2}{3}$ gleich;

$\frac{7}{9} : \frac{5}{8} = \frac{7}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{56}{45}$; $\frac{25}{48} : \frac{33}{74} = \frac{25}{48} \times \frac{74}{33} = \frac{1850}{1584}$

$\frac{11}{15} : \frac{13}{21} = \frac{11}{15} \times \frac{21}{13} = \frac{231}{195}$; $\frac{35}{61} : \frac{47}{89} = \frac{35}{61} \times \frac{89}{47} = \frac{3115}{2867}$

§. 26.

Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden, so multiplicire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und dividire das Product durch den Nenner desselben.

Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens fließt aus den nämlichen Gründen wie im §. 24. Z. B.

$$8 \times \frac{3}{4} = \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$9 \times \frac{7}{8} = \frac{9 \times 7}{8} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$$

$$17 \times \frac{31}{45} = \frac{17 \times 31}{45} = \frac{527}{45} = 11\frac{32}{45}$$

§. 27.

Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche dividirt werden, so dividire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und multiplicire den Quotienten mit dem Nenner desselben, oder kürzer, man multiplicire die ganze Zahl mit dem umgekehrten Bruch.

Der Beweis beruhet auf eben den Gründen, wie in §. 25. Z. B.

$$9 : \frac{3}{4} = \frac{9}{3} \times 4 = 3 \times 4 = 12$$

oder

$$9 : \frac{3}{4} = 9 \times \frac{4}{3} = \frac{9 \times 4}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$15 : \frac{7}{8} = 15 \times \frac{8}{7} = \frac{15 \times 8}{7} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{2}$$

§. 28.

Wenn man das in den lezten vier §§. gezeigte Verfahren, einen Bruch und eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren und zu dividiren, aufmerksam betrachtet, so wird man sich nicht daran stoßen, daß man bey der Multiplication eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche das Product kleiner fand, als den Multiplicandus, und daß man im Gegentheil bey der Division eines Bruchs oder einer ganzen Zahl

mit einem Bruche den Quotienten größer fand, als den Dividendus. Man wird vielmehr den Grund davon leicht darin entdecken, daß die Multiplication eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche eben so wenig eine bloße Multiplication, als die Division eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche eine bloße Division ist, indem die erstere neben der Multiplication des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators noch eine Division des Products mit dem Nenner des lezteren, (nach §. 24. und 26.) die leztere hingegen neben der Division des Dividendus mit dem Zähler des Divisors noch eine Multiplication des Quotienten mit dem Nenner des lezteren (nach §. 25. und 27.) erfordert. Hieraus wird man zugleich einsehen, daß bey der Multiplication eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche, das Product immer kleiner, als der Multiplicandus, und bey der Division eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche, der Quotient immer größer, als der Dividendus werden müsse, so oft der Nenner, im ersten Falle des Multiplicators, im lezten des Divisors, größer ist, als dessen Zähler. Dies führt uns nun auf die Bemerkung eines in Absicht auf die Größe und übrige Beschaffenheit der Zähler und Nenner unter den Brüchen Statt habenden Unterschieds, und der darauf gegründeten Eintheilung derselben.

Bey einem Bruche kann nämlich entweder der Nenner größer als der Zähler, oder umgekehrt der Zähler größer als der Nenner seyn, im ersten Falle heißt der Bruch ein ächter, im lezten ein unächter; ferner kann der Nenner eines Bruchs in seinem Zähler entweder aufgehen oder nicht, ist das erste, so wird der Bruch ein uneigentlicher, ist aber das lezte, so wird er ein eigentlicher genannt. Hieraus ergiebt sich also, daß zwar ein unächter Bruch entweder ein eigentlicher oder uneigentlicher seyn könne, daß aber ein ächter Bruch immer auch ein eigentlicher sey, folglich nie ein uneigentlicher seyn könne. Auf einen dritten Unterschied unter den Brüchen, führten uns die in §. 24. u. 25. beschriebenen Verfahrensarten, einen Bruch mit einem andern zu multipliciren oder zu dividiren. Denn es wurde daselbst schon bemerkt, daß wenn man bey der Multiplication zweyer Brüche das erste, zweyte und dritte Verfahren

in §. 24. und bey der Division zweyer Brüche das erste, zweyte und dritte Verfahren in §. 25. anwenden wollte, man meistentheils im ersten Falle zum Producte und im lezten zum Quotienten einen Bruch bekommen würde, dessen Zähler und Nenner auch wieder gebrochene Zahlen wären. Einen solchen Bruch nun nennt man einen unordentlichen, da hingegen ein Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, ein ordentlicher genannt wird.

Da man nun (nach Nro I. §. 17.) einen jeden Bruch als den Quotienten betrachten kann, welcher entstehet, wenn man den Zähler des Bruchs durch seinen Nenner dividirt, und da man (nach §. 25. Nro II.) jeden Bruch mit jedem andern wirklich dividiren kann, so kann man folglich jeden unordentlichen Bruch in einen ordentlichen verwandeln, wenn man den Zähler desselben mit seinem Nenner (nach §. 25. Nro II.) wirklich dividirt. Hieraus erhellet also, daß man diese leztere Eintheilung der Brüche auch ganz entbehren könnte.

§. 29.

Soll ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt, oder davon abgezogen werden, so verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch von gleichem Nenner (nach §. 20. Nro II.) und addire im ersten Falle die beyden Brüche, oder ziehe im lezten den keineren von dem größeren ab. Doch kann man bey der Subtraction, wenn der abzuziehende Bruch ein ächter Bruch ist, kürzer dadurch zu seinem Zwecke gelangen, daß man von der ganzen Zahl nur eine Einheit wegnimmt, diese in einen Bruch verwandelt, der mit dem gegebenen einerley Nenner hat, und von demselben den gegebenen Bruch abzieht.

Beyspiele der Addition.

$$9+\frac{5}{4}=\frac{9\times 4}{4}+\frac{5}{4}=\frac{36}{4}+\frac{5}{5}=\frac{36+5}{4}=\frac{41}{4}$$

$$145+\frac{31}{87}=\frac{145\times 87}{87}+\frac{31}{87}=\frac{12615}{87}+\frac{31}{87}=\frac{12615+31}{87}$$

$$=\frac{12646}{87}$$

Beyspiele der Subtraction.

$$7-\frac{5}{8}=\frac{7\times 8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{56}{8}-\frac{5}{8}=\frac{56-5}{8}=\frac{51}{8}$$

$$21-\frac{11}{17}=20+\frac{17}{17}-\frac{11}{17}=20+\frac{17-11}{17}=20+\frac{6}{17}$$

$$56-\frac{18}{25}=55+\frac{25}{25}-\frac{18}{25}=55+\frac{25-18}{25}=55+\frac{7}{25}$$

§. 30.

Bisher haben wir die vier arithmetischen Operationen mit ganzen und gebrochenen Zahlen besonders vorgenommen. Allein man kommt in Rechnungen sehr oft auf ganze Zahlen mit angehängten Brüchen, wie wir es auch im Bisherigen schon mehrmals gefunden haben. Man nennet solche Ausdrücke gemischte Zahlen; und man kann aus der Betrachtung der Natur derselben leicht schliessen, daß sie den vier arithmetischen Operationen eben so gut unterworfen seyn müssen, als die Theile, woraus sie bestehen, das heißt, als die ganzen und gebrochenen Zahlen, jede insbesondere. Es entstehet also die Frage, wie man es anzugreifen habe, wenn man die Veränderungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, entweder mit gemischten und gemischten, oder mit gemischten und ganzen, oder endlich mit gemischten und gebrochenen Zahlen vornehmen solle? Die allgemeine Regel für alle diese Veränderungen ist nun diese:

Man verwandle die gemischtrn Zahlen (nach §. 20. Nro II.) in unächte Brüche, und verfahre im übrigen nach den für die Rechnungsarten mit Brüchen bisher gegebenen Anweisungen.

Beyspiele.

I. Addition gemischter Zahlen.

$$5\frac{5}{8}+11\frac{4}{9}=\frac{43}{8}+\frac{103}{9}=\frac{43\times 9+103\times 8}{8\times 9}=\frac{387+824}{72}$$
$$=16\frac{59}{72}$$

$$17\frac{3}{4}+21\frac{5}{7}=\frac{71}{4}+\frac{152}{7}=\frac{71\times 7+152\times 4}{4\times 7}=\frac{497+608}{28}$$
$$=\frac{1105}{28}=39\frac{13}{28}$$

II. Subtraction gemischter Zahlen.

$$31\tfrac{4}{7} - 25\tfrac{2}{5} = \frac{31 \times 7+4}{7} - \frac{25 \times 5+2}{5} = \frac{121}{7} - \frac{127}{5}$$
$$= \frac{121 \times 5 - 127 \times 7}{7 \times 5} = \frac{1105 - 889}{35} = \frac{216}{35} = 6\tfrac{6}{35}$$

$$15\tfrac{3}{4} - 9\tfrac{7}{8} = \frac{15 \times 4+3}{4} - \frac{9 \times 8+7}{8} = \frac{63}{4} - \frac{79}{8}$$
$$= \frac{63 \times 8 - 79 \times 4}{4 \times 8} = \frac{504 - 316}{32} = \frac{188}{32} = 5\tfrac{28}{32}$$

III. Multiplication gemischter Zahlen.

$$41\tfrac{2}{7} \times 67\tfrac{5}{8} = \frac{41 \times 7+2}{7} \times \frac{67 \times 8+5}{8} = \frac{289}{7} \times \frac{541}{8}$$
$$= \frac{289 \times 541}{7 \times 8} = \frac{156349}{56} = 2793\tfrac{41}{56}$$

$$21\tfrac{3}{4} \times 36\tfrac{7}{9} = \frac{21 \times 4+3}{4} \times \frac{36 \times 9+7}{9} = \frac{87}{4} \times \frac{331}{9}$$
$$= \frac{87 \times 331}{4 \times 9} = \frac{28797}{36} = 799\tfrac{33}{36}$$

IV. Division gemischter Zahlen.

$$11\tfrac{5}{7} : 6\tfrac{3}{4} = \frac{11 \times 7+5}{7} : \frac{6 \times 4+3}{4} = \frac{82}{7} : \frac{27}{4}$$
$$= \frac{82}{7} \times \frac{4}{27} = \frac{28 \times 4}{7 \times 27} = \frac{328}{189} = 1\tfrac{139}{189}$$

$$27\tfrac{7}{9} : 18\tfrac{8}{11} = \frac{27 \times 9+7}{9} : \frac{18 \times 11+8}{11} = \frac{250}{9} : \frac{206}{11}$$
$$= \frac{250}{9} \times \frac{11}{206} = \frac{250 \times 11}{9 \times 206} = \frac{2750}{1854} = 1\tfrac{896}{1854}$$

Daß man übrigens bey der Addition und Subtraction gemischter Zahlen das Gesuchte auf einem etwas kürzeren Wege erhalte, wenn man die ganzen und gebrochenen Zahlen, jede besonders, addirt und subtrahirt, wird jeder, der die bisher vorgetragenen Lehren von den Rechnungsarten mit diesen Zahlen verstanden hat, von selbst bemerken.

§. 31.

Bey unsern bisherigen Rechnungen kamen wir oft auf Brüche, denen man es leicht ansehen konnte, daß sie sich noch kleiner und einfacher ausdrücken liessen. Es

ist aber die Schuldigkeit des Rechners, die Antwort auf jede Rechnungsfrage in dem einfachsten möglichen Ausdrucke zu geben; wir müssen daher auch noch wissen, wie man einen Bruch, ohne seinen Werth zu ändern, durch kleinere, oder durch die kleinsten Zahlen ausdrücken könne. Man nennet diese Veränderung das Aufheben der Brüche. Es ist leicht einzusehen, daß dieses Aufheben nicht anders, als durch die Division geschehen könne, indem man nämlich den Zähler und Nenner des Bruchs mit einerley Zahl dividirt. Dabey wird also vorausgesezt, daß der Zähler und Nenner eines Bruchs zusammengesezte, das heißt solche, Zahlen seyen, welche durch Multiplication aus andern einfachen Zahlen entstanden sind. Soll sich also ein Bruch aufheben lassen, so müssen sein Zähler und sein Nenner Producte seyn, die einen oder etliche Factoren mit einander gemein haben. Ein solcher gemeinschaftlicher Factor zweyer Producte heißt ein gemeines Maaß derselben, und er heißt das größte gemeine Maaß dieser Producte, wenn sie keinen größeren Factor mit einander gemein haben. Ein Bruch wird demnach aufgehoben, wenn man seinen Zähler und Nenner mit ihrem gemeinen Maaße dividirt. Z. B. man soll den Bruch $\frac{95}{105}$ aufheben, so dividire man ihn im Zähler und Nenner mit der Zahl 5 und man erhält den Bruch $\frac{19}{21}$, und weil die Zahl 5 das größte gemeine Maaß der Zahlen 95 und 105 ist, so ist $\frac{19}{21}$ der kleinste Ausdruck oder die kleinste Benennung, auf welche der obige Bruch gebracht werden kann. Z. B.

$$\frac{36}{56} = \frac{4 \times 9}{8 \times 7} = \frac{9}{14}$$

$$\frac{72}{81} = \frac{8 \times 9}{9 \times 9} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{75}{125} = \frac{3 \times 25}{5 \times 25} = \frac{3}{5}$$

Dritter Abschnitt.

Von den benannten Zahlen.

§. 32.

Bey allen bisher angestellten Berechnungen sahen wir immer nur allein auf die Menge der Einheiten, welche die Zahlen, womit wir rechneten, enthielten, nicht zugleich auf die Art dieser Einheiten. Es ist aber schon in §. 17. Nro II. gelegentlich bemerkt worden, daß man beym Rechnen auch zugleich mit auf die Art der Einheiten, woraus die Zahlen bestehen, Rücksicht nehmen könne, auch ist es daselbst schon beygebracht worden, daß die Zahlen im ersten Falle *unbenannte*, im lezten hingegen *benannte* heissen. Da wir nun die vier einfachen Rechnungsarten mit ganzen, gebrochenen und gemischten unbenannten Zahlen zu Ende gebracht haben, so führt uns jezt die natürliche Ordnung auf die Rechnungsarten mit benannten Zahlen. Die lezteren sind eigentlich nichts anders, als eine Anwendung der ersteren. Wer aber diese Anwendung machen will, muß verschiedene Kenntnisse von der Beschaffenheit der Dinge selbst besitzen, die man durch Zahlen auszudrücken pflegt. Manche derselben lernt man niemals kennen, wenn man sich nicht mit den Wissenschaften bekannt macht, die davon besondern Unterricht geben. Mit vielen hieher gehörigen Kenntnissen aber wird man durch Bekanntschaft mit verschiedenen Gewerben und Handthierungen des gemeinen Lebens versehen. Einige derselben sind so nothwendig geworden, daß man ihrer, so lange man in Gesellschaft mit andern Menschen lebt, schlechterdings nicht

entbehren kann. Von diesen wird man daher auch bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens, wenigstens zur Nothdurft, unterrichtet. Hieher gehören vorzüglich die Werthe der Münzen, die verschiedene Beschaffenheit der Maaße, der Gewichte u. dergl. m.

§. 33.

Wenn man nun Anwendungen der in den beyden vorigen Abschnitten vorgetragenen allgemeinen Rechnungsregeln auf die eben genannten Dinge machen will, so braucht man eigentlich nichts Neues zu lernen, als das Gesetz, nach welchem einige Einheiten einer niedrigern Ordnung von diesen Dingen, eine Einheit der nächsthöheren Ordnung ausmachen. Bey unbenannten Zahlen machen (nach §. 3.) immer zehn Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächsthöheren Ordnung aus. Dies allgemeine Grundgesez der ganzen Arithmetik findet zwar auch bey allen benannten Zahlen ohne Ausnahme Statt, nur muß bey diesen noch das vorhin erwähnte Gesez, welches sich nicht allein auf die Mengen, sondern zugleich auf die Arten der durch die benannten Zahlen ausgedrückten Dinge bezieht, damit verbunden werden, oder mit andern Worten, man muß ausserdem noch wissen, in wie viel Theile eine jede Münze von einem bekannten Werthe, ein bekanntes Gewicht, ein bekanntes Maas u. s. w. eingetheilt werde, und was für Namen diese Theile führen. Wenn man z. B. mehrere Zahlen von Tagen, Stunden und Minuten zusammenzählen sollte, so wäre es nicht genug, jede Zahl mit den übrigen gleiches Namens in eine Reihe zu sezen, nämlich Tage zu Tagen, Stunden zu Stunden u. s. w. und sie nach dem arithmetischen Grundgesetze so zu addiren, daß man in jeder Reihe für jede 10 Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit in die Stelle der nächsthöheren Ordnung in der nämlichen Reihe rückte, sondern so bald die Anzahl der Einheiten einer niedrigern Ordnung durch die Addition so groß geworden wäre, daß sie eine oder mehrere Einheiten von der nächsthöheren Ordnung in sich enthielte, so müßte man diese auch wirklich zu der Reihe der nächsthöheren Ordnung übertragen; sobald man z. B. in unserm gegenwärtigen Falle durch die Addition eine Anzahl von Minuten bekommen hätte, die

eine oder etliche Stunden enthielte, so dürfte man nur den, nach Abzug derselben bleibenden, Rest unter die Reihe der Minuten setzen, die darin enthaltenen Stunden aber müßte man zu der Reihe der Stunden übertragen, und auf gleiche Art müßte man auch mit den Stunden, Tagen, u. s. w. verfahren. Zu dem Ende müßte man also das Gesetz kennen, nach welchem bey dem Zeitmaaße mehrere Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächsthöheren Ordnung ausmachen, oder mit andern Worten, man müßte wissen, wie viel auf einen Tag Stunden, auf eine Stunde Minuten u. s. w. gerechnet werden. Und eben so verhält es sich auch mit allen übrigen benannten Zahlen und die Rechnung mit denselben hat also ausser dem Gesetze, nach welchem die Einheiten von niedrigeren Ordnungen zu höheren fortschreiten, nichts Besonderes.

§. 34.

Kennet man einmal dieses Gesez, so kann man auch ohne Anstoß in jedem Falle entweder eine Menge kleinerer Theile, die einen größern Theil ein oder etlichemal enthält, durch diesen größern Theil, oder einen größeren Theil, durch die Menge kleinerer Theile, die er enthält, ausdrücken. Das Verfahren, wodurch dieses bewerkstelliget wird, nennt man eine benannte Zahl auf einen andern Namen oder auf eine andere Benennung bringen, oder sie reduciren. Aus dem eben Gesagten erhellet, daß dies auf zweyerley Arten geschehen könne, da man sie entweder auf einen größeren, oder auf einen kleineren Namen bringen kann. Man bringt aber eine benannte Zahl auf einen größeren Namen, wenn man die Einheiten einer niedrigern Klasse mit der Zahl der Theile, welche eine Einheit der nachsthöheren Klasse ausmachen, dividirt. Denn da eine benannte Zahl auf einen größeren Namen bringen, nichts anders heißt, als eine gegebene Anzahl kleinerer Theile, durch die darin enthaltenen größeren Theile ausdrücken, so folgt, daß man für jede Menge der kleineren Theile, welche einem größeren Theil gleich ist, diesen größeren Theil einmal nehmen müsse. Dies ist aber eben das, was bey der vorerwähnten Division geschieht.

Hingegen wird eine benannte Zahl auf einen kleineren Namen gebracht, wenn man die Einheiten der höheren Klasse mit der Zahl der Theile der niedrigeren Klasse, welche jede Einheit der höheren enthält, multiplicirt. Denn da eine benannte Zahl auf einen kleineren Namen bringen nichts anders heißt, als eine Anzahl größerer Theile durch die darin enthaltenen kleineren Theile ausdrücken, so folgt, daß man für jeden größeren Theil so viel kleinere rechnen müsse, als von den lezteren auf den ersteren gehen, oder ihn ausmachen, und dies wird eben durch die vorerwähnte Multiplication erhalten. Hieraus erhellet nun auch der Grund, warum wir nicht gleich im ersten Abschnitte die Rechnung mit benannten Zahlen der Rechnung mit unbenannten anhängen konnten, weil man nämlich öfters bey der Addition benannter Zahlen, schon die Division anwenden, folglich alle vier arithmetischen Operationen bereits verstehen muß. Von dem vorhin beschriebenen Verfahren benannte Zahlen zu reduciren, ist noch zu bemerken, daß es nicht auf ganze Zahlen eingeschränkt ist, sondern sich auch auf gebrochene erstreckt.

§. 35.

Sollen demnach benannte Zahlen addirt werden, so schreibe man diejenigen, welche einerley Namen führen, alle in eine Reihe unterinander. Alsdann mache man bey derjenigen Reihe, welche den kleinsten Namen hat, welches immer die lezte gegen die rechte Hand zu ist, den Anfang des Addirens. Enthält nun die gefundene Summe dieser Reihe keine Einheit von dem nächsthöheren Namen, so schreibe man sie unverändert unter dieselbige Reihe. Ist aber in dieser Summe die Einheit des nächsthöheren Namens ein oder etlichemal enthalten, so bringe man sie sogleich (nach §. 34.) auf diesen nächsthöheren Namen. Die durch diese Reduction herausgebrachte Zahl von dem nächsthöheren Namen trage man zu der folgenden Reihe, welche eben diesen Namen führt, hinüber, und setze nun den etwa übrigbleibenden Rest unter die ihm gleichnamige Reihe. Hierauf gehe man zu der folgenden Reihe von dem nächsthöheren Namen fort, und verfahre mit dieser, wie auch mit allen nachfolgenden, auf die nämliche Art. Z. B.

Ct.	—	Pf.	—	Bl. Pf.	—	Lothe.
76	=	45	=	3	=	21
52	=	68	=	1	=	17
37	=	56	=	0	=	11
(1)		(2)		(6)		
	=	171	=	10	=	49
166	=	71	=	2	=	1

Ballen	—	Ries	—	Buch	—	Bogen.
125	=	7	=	17	=	14
217	=	4	=	11	=	18
465	=	8	=	13	=	14
(2)		(2)		(1)		
	=	21	=	42	=	47
809	=	1	=	2	=	23

Fuder	—	Ohm	—	Maaß	—	Schpp.
325	=	6	=	87	=	3
765	=	5	=	73	=	1
654	=	3	=	65	=	2
(2)		(2)	=	(1)		
	=	16	=	226	=	6
1744	=	2	=	46	=	2

fl.	—	Kr.
125	=	37
256	=	45
374	=	21
407	=	32
548	=	17
658	=	19
(2)		
	=	171
2430	=	51

Tage	—	Stunden	—	Min.	—	Sek.
81	=	13	=	48	=	54
76	=	21	=	37	=	42
145	=	12	=	16	=	27
(1)	=	(1)	=	(2)		
3	=	47	=	103	=	123
303	=	23	=	43	=	3

Ct.	—	℔.	—	Loth	—	Quintch.
145	=	84	=	27	=	3
367	=	71	=	19	=	1
354	=	58	=	25	=	2
(2)		(2)		(1)		
		215	=	72	=	6
1048	=	15	=	8	=	2

fl.	—	Kr.	—	Heller.
125	=	17	=	3
236	=	41	=	5
385	=	25	=	1
463	=	54	=	4
594	=	37	=	0
769	=	46	=	2
874	=	27	=	2
965	=	34	=	5
(4)		(3)		
	=	285	=	23
4415	=	45	=	5

§. 36.

Sollen benannte Zahlen von einander abgezogen werden, so schreibe man wiederum diejenigen, welche einerley Namen haben, untereinander und ziehe alsdann jeden Theil der kleineren Zahl von dem gleichnamigen der grösseren ab. Wäre aber der gleichnamige Theil der größeren Zahl kleiner, als derjenige Theil der kleineren, welcher davon abgezogen werden sollte, so borge man von dem Theile des Minuendus, welcher den nächsthöheren Namen führt, eine Einheit weg, und rechne dafür so viele Einheiten zu dem Theile des nächstkleineren Namens, als von diesen auf eine Einheit des nächstgrößeren gehen. Z. B.

Ct.	—	℔.	—	Loth	—	Quintch.
		116		40		5
325.	=	17.	=	9.	=	1
254	=	68	=	27	=	3
70	=	48	=	13	=	2

Ballen	—	Ries	—	Buch	—	Bogen.
		12		24		31
5871	=	3	=	5	=	7
5066	=	7	=	18	=	28
804	=	5	=	6	=	3

Tage	—	Stunden	—	Min.	—	Sek.
		30		72		71
432	=	7	=	13	=	11
321	=	19	=	48	=	54
110	=	11	=	24	=	17

Fuder	—	Ohm	—	Maaß	—	Schpp.
		$8\frac{1}{2}$		106		5
7963	=	2	=	17	=	1
6778	=	7	=	74	=	3
1174	=	1	=	32	=	3
				+ 45		
				77		

§. 37.

Die Probe der Addition und Subtraction mit benannten Zahlen, wird eben so, wie bey diesen Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen, gemacht, weil die oben (§. 7.) in Beziehung auf die lezteren beygebrachten Gründe bey den ersteren auf gleiche Weise Statt finden.

Probe der Addition.

fl.	—	Kr.	—	Heller.
3467	=	31	=	2
7854	=	54	=	1
9638	=	45	=	3
(2)		(1)		
	=	131	=	
20961	=	11	=	=
3467	=	31	=	2
7854	=	54	=	1
(1)				
		85	=	3
11322	=	25	=	3

				70			
20961	=		11	=		0	
11322	=		25	=		3	
9638	=		45	=		3	
Ct.	—	tb.	—	Loth	—	Quintch.	
		106		42		5	
80079	=	7	=	11	=	1	
76968	=	96	=	27	=	3	
3110	=	10	=	15	=	2	
(1)		(1)		(1)			
		107	=	43	=	5	
80079	=	7	=	11	=	1	

§. 38.

Da man in der Multiplication bey dem Multiplicator jedesmal nur auf die Menge, nicht aber auf die Art seiner Einheiten sieht, so kann eine benannte Zahl nicht wieder mit einer andern benannten, sondern nur mit einer unbenannten multiplicirt werden. Soll aber dieses geschehen, so mache man bey dem Theile der benannten Zahl, welcher den kleinsten Namen hat, den Anfang des Multiplicirens, und gehe sodann zu den übrigen Theilen von den größeren Namen fort; jedes gefundene Product aber bringe man auf die nächstgrößere Benennung, und trage so viele Einheiten, als es von dieser enthält, zu dem Producte des Theils, der eben diese Benennung führt, über, den bey der Reduction etwa übrig bleibenden Rest aber schreibe man unter eben den Theil, aus welchem das Product selbst entstanden ist, wie bey der Addition. Z. B.

Jahre	—	Mon.	—	Wochen	—	Tage.
738	=	9	=	3	=	5
						25
3690		225		75		7) 125 ⌉ 17
1476		+ 23		+ 17		7 ⌊
18450		12) 248 ⌉ 20		4) 92 ⌉ 23		55
+ 20		24 ⌊		8 ⌊		49
18470		8		12		6
				12		
18470	=	8	=	0	=	6

Ballen	—	Ries	—	Buch	—	Bogen.
763	=	9	=	18	=	15
						76

4578 683 108 90
5341 + 70 126 105
57988 10) 754 75 1368 24) 1140 47
+75 70 +47 96
58063 54 20) 1415 70 180
50 140 168
4 15 12

58063 = 4 = 15 = 12

Tage	—	Stunden	—	Min.	—	Sek.
365	=	21	=	47	=	56
						9

3285 189 423 60) 50478
8 7 8 4801
3293 24) 19678 60) 43177 24
192 420
4 11

3293 = 4 = 11 = 24

§. 39.

Eine benannte Zahl kann nicht nur mit einer unbenannten, sondern auch mit einer benannten dividirt werden, da man in der Division bey dem Divisor eben sowohl auf die Art der Einheiten, die er enthält, als auf deren Menge Rücksicht nehmen kann. Soll eine benannte Zahl mit einer unbenannten dividirt werden, so dividire man die Theile der benannten Zahl mit der unbenannten nach einander so, daß man mit demjenigen Theile anfängt, welcher den höchsten Namen hat, und alsdann zu den Theilen von den nächst niedrigeren Namen fortgeht. Die Reste, welche etwa dabey übrig bleiben möchten, bringe man allemal auf den nächst kleinern Namen, und addire sie zu dem nächst kleineren Theile des Dividendus, welcher eben diesen Namen führt. In diesem Falle bestimmt der Divisor die Anzahl der Theile in welche der Dividendus getheilt werden soll, der Quo-

tient aber giebt die Größe derselben an. Soll hingegen eine benannte Zahl durch eine andere benannte dividirt werden, so bringe man zuerst den ganzen Dividendus und Divisor auf ihren kleinsten gemeinschaftlichen Namen, und verrichte alsdann die Division nach den gewöhnlichen Regeln. In diesem Falle zeigt der Quotient die Anzahl der Theile des Dividendus, der Divisor aber die Größe eines solchen Theils an.

Tage	—	Stunden	—	Min.	—	Sec.
768	=	9	=	21	=	36

:9

9) 768 | 85 — 72 — 48 — 45 — 3

24 — 3 — 72 — 9 — 9) 81 | 9

9) 21 | 2 — 18 — 3

60 — 3 — 180 — 36 — 9) 216 | 42

85	=	9	=	2	=	24

Ballen	—	Ries	—	Buch	—	Bogen.
245	=	7	=	18	=	16

:12

12) 245 | 20 — 24 — 5

50 — 7 — 12) 57 | 4 — 48 — 9

180 — 18 — 12) 198 | 16 — 12 — 78 — 72 — 6

144 — 16 — 12) 160 | $13\frac{4}{12}=13\frac{1}{3}$ — 12 — 40 — 36 — 4

20	=	4	=	16	=	$13\frac{1}{3}$

Aufgabe. Es sollen 8756 Gulden 48 Kreuzer durch 12 Kreuzer dividirt werden.

fl.	—	Kr.
8756	=	48

: 12 Kreuzer.

8756
60
525360
48
12) 525408 | 43784

Bey dieser Aufgabe verlangt man aus dem gegebenen Ganzen und der Größe eines Theils die Zahl der Theile zu finden; der Sinn der Frage ist eigentlich der: man soll angeben, wie viel der Theile werden können, wenn man 8756 Gulden und 48 Kreuzer so eintheile, daß jeder Theil gleich 12 Kreuzern gemacht werde?

Aufgabe. Wenn 981 Achtel, 5 Mesten 6 Mäschen so vertheilt werden sollen, daß jeder Theil 4 Mäschen bekommt, die Anzahl der Theile zu finden?

Achtel	—	Mesten	—	Mäschen	
981	=	5	=	6	
					: 4 Mäsch.

981
8
7848
5
7853
8
62824
6
4) 62830 | 15707 $\frac{1}{2}$

Hier zeigt der Quotient an, daß 51707 Ganze, und ein halber Theil daraus gemacht gemacht werden können, oder daß 15707 Personen jede 4 Mäschen und noch eine Person $\frac{1}{2}$ Mäschen bekommen können.

Aufgabe. Ein Brunnen kostet 336 Gulden, zu graben, und auszumauern, da jeder Schuh mit 24 Kreuzern bezahlt wurde, wie tief war der Brunnen?

336
60
24) 20160 | 840 Schuh.
192
96
96
0

Aufgabe. Ein Buch brachte seinem Verfasser 1500 Reichsthaler ein, da jeder Bogen mit $6\frac{1}{2}$ Reichsthaler bezahlt wurde, wie viel Bogen hatte das Buch?

$1500 : \frac{13}{2} = 1500 \times \frac{2}{13} = \frac{3000}{13} =$ 13) 3000 ⎫ $230\frac{10}{13}$ Bogen
26
40
39
10

§. 40.

Die Probe der Multiplication und Division in benannten Zahlen wird eben so, wie bey diesen Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen, gemacht, weil bey den ersteren dieselbigen Gründe ihre Anwendung finden, welche oben (§. 15.) für die lezteren beygebracht worden sind.

Probe der Multiplication.

Ballen	—	Ries	—	Buch	—	Bogen.
256	=	7	=	15	=	18
						36

1536	252	90	108
768	28	45	54
28	1|0) 28|0 ⎫ 28	540	24) 648 ⎫ 27
9244	2	27	48
	8	2|0) 56|7 ⎫ 28	168
	8	4	168
	0	16	
		16	
		0	

9244	=	0	= 7 =	0
9244	=	0	= 7 =	0

: 36

36) 9244 ⎫ 256	36) 280 ⎫ 7	560	36) 648 ⎫ 18
72	252	7	36
204	28	36) 567 ⎫ 15	288
180		36	288
244		207	0
216		180	
28		27	
256	= 7	= 15	= 18

Probe der Division.

Centner	—	℔	—	Loth	—	Qtch.
39200	=	85	=	13	=	2

:58

58) 392001675 5000 1248 172
348 l 85 13 2
440 58) 5085 87 58) 1261 21 58) 274 3
406 464 l 116 l 174 l
340 445 101 ⌐
290 406 58
50 39 43

675 = 87 = 21 = 3

675 = 87 = 21 = 3
58

5400 696 168 4) 174 43
3375 535 105 16 l
50 5046 43 14
39200 39 32) 1261 39 12
100) 5085 50 96 l 2
500 l 301
85 288
13

39200 = 85 = 13 = 2

Vierter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 41.

Das Wesen alles Rechnens besteht eigentlich darin, daß man Zahlen nach gewissen Regeln aus einander erfindet. Daß wir aber bey der Berechnung der einen Zahl diese, uud bey der Berechnung einer andern eine andere Regel wählen, das geschieht deßwegen, weil wir uns bey einer jeden Zahl, die wir suchen, eine besondere Art gedenken, wie sie aus einer andern Zahl bestimmt wird. Z. B. man sucht die Zahl, welche aus 28 bestimmt wird, wenn 54 dazu kommen. Man wendet also diejenige Regel an, von welcher man weiß, daß nach ihr Zahlen vermittelst dieser Bestimmungsart aus einander hergeleitet werden können. Verlangt man hingegen die Zahl zu wissen, welche bestimmt wird, wenn 28, 54mal genommen wird, so folgt man einer andern Regel, und findet auch eine ganz andere Zahl. Ferner wenn man weiß, daß 100 Pfunde einer gewissen Waare 35 Reichsthaler gelten, und man möchte gerne den Preis von 780 Pfunden eben dieser Waare wissen, so ist offenbar, daß dieser Preis aus der Zahl 35 auf eben die Art bestimmt werden müsse, wie die Zahlen der Gewichte 100 und 780 aus einander bestimmt werden. Man muß also wiederum eine andere Regel anwenden, um die gesuchte Zahl zu finden. Die Art nun, wie Größen und Zahlen aus einander entstehen, ist ihr **Verhältniß**. Es ist leicht

einzusehen, daß einerley Zahl bald auf diese, bald auf eine andere Art entstehen kann. Wenn man z. B. 6 zu 18 addirt, so entsteht 24; und wenn man 6, 4mal nimmt, so erhält man auch 24, aber auf eine ganz andere Art. Dort wurde nur zu der Zahl 6 die Zahl 18 gesezt, welche der Unterschied der Zahl 6 und der Zahl 24 war; hier hingegen wurde die Zahl 6, 4mal zu sich selbst gesezt. Wenn man 9 von 33 abzieht, so entsteht ebenfalls die Zahl 24, wie auch wenn man $\frac{1}{11}$ von 33, 8mal zu sich selbst addirt, und so wird man von dieser einzigen Zahl 24 noch unendlich viele Beyspiele geben können, in welchen sie immer auf eine andere Weise entstehet. Gleichwohl lassen sich alle noch so mannigfaltige Arten, wie Zahlen aus einander entstehen können, unter folgende zwey Hauptarten bringen: entweder entsteht nämlich eine Zahl aus einer andern durch Hinzusezung oder Wegnehmung einer andern Zahl von dieser, und diese Entstehungsart der Zahlen heißt ihr arithmetisches Verhältniß; oder sie entstehet durch wiederholte Zusammensezung einer andern oder eines Theils derselben, und diese Entstehungsart heißt das geometrische Verhältniß derselben. Das eine oder das andere von diesen Verhältnissen hat allemal Statt, so oft man Zahlen aus einander bestimmt oder herleitet.

§. 42.

Das Verhältniß zweyer Zahlen kann nicht ohne eine dritte Zahl eingesehen werden. Bey dem arithmetischen Verhältnisse ist diese Zahl der Unterschied, und wird durch die Subtraction, bey dem geometrischen aber ist sie der Quotient, und wird durch die Division gefunden; sie wird aber im lezten Falle nicht Quotient sondern Exponent des Verhältnisses genannt. So ist z. B. bey den Zahlen 8 und 24 die Differenz, die ihr arithmetisches Verhältniß anzeigt 16, der Exponent aber, der ihr geometrisches Verhältniß anzeigt, 3. Das natürlichste Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist demnach das Zeichen der Subtraction, und das natürlichste Zeichen des geometrischen Verhältnisses, das Zeichen der Division. Das arithmetische Verhältniß der Zahlen 8 und 24 wird daher also ausgedrückt: 24 — 8, ihr geometrisches Verhältniß aber also 24 : 8. Die

Zahlen, welche auf die eine oder andere Art mit einander im Verhältnisse stehen, werden Glieder des Verhältnisses genannt, und zwar sieht man bey jedem Verhältnisse immer ein Glied als das vorhergehende, das andere als das nachfolgende an, wobey die Ordnung ganz willkührlich ist. Die vorhergehenden Glieder werden auch Vorderglieder, die nachfolgenden Hinterglieder genannt.

§. 43.

Wenn zwey Paare Zahlen einerley Unterschied haben, so hat das vorhergehende Glied zum folgenden bey dem einen Paare eben das arithmetische Verhältniß, wie bey dem andern, und man kann also diese arithmetischen Verhältnisse gleich nennen, weil sie sich durch nichts unterscheiden. So sind z. B. 12 — 4 und 18 — 10 zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, oder es ist 12 — 4 = 18 — 10. Zwey gleiche arithmetische Verhältnisse geben nun eine arithmetische Proportion. Diese enthält demnach 4 Glieder, wovon das erste und vierte die äusseren, das zweyte und dritte die mittleren heissen. Sind die mittleren Glieder einerley, so heißt die Proportion stetig oder zusammenhängend, sind sie aber verschieden, so heißt die Proportion abgesondert oder getrennt. So ist z. B. 15 — 9 = 9 — 3 eine stetige, hingegen 17 — 8 = 11 — 2 eine abgesonderte arithmetische Proportion; in der stetigen Proportion heißt das Glied, welches zweymal vorkommt, wie im vorigen Beyspiele 9, zwischen 15 und 3, das mittlere.

§. 44.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äusseren Glieder der Summe der beyden mittleren gleich.

Es sey die abgesonderte arithmetische Proportion 9 — 4 = 21 — 16, so ist in derselben die Summe der beyden äusseren Glieder 9 + 16, welches 25 beträgt, und die Summe der beyden mittleren Glieder ist 4 + 21, welches auch 25 giebt. Oder es sey die stetige arithmetische Proportion 13 — 8 = 8 — 3, so ist in derselben

die Summe der beyden äusseren Glieder $= 13 + 3$, welches 16 ausmacht, und die Summe der beyden mittleren Glieder $= 8 + 8 = 2 \times 8$, welches auch wiederum 16 giebt. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist demnach die Summe der beyden äusseren Glieder dem doppelten mittleren Gliede gleich.

Daß dieser Saz ganz allgemein von jeder arithmetischen Proportion gelte, erhellet aus folgenden Gründen. Nach dem vorigen §. besteht jede arithmerische Proportion aus zwey gleichen arithmetischen Verhältnissen. Die Gleichheit dieser Verhältnisse aber beruhet darauf, daß zwischen den beyden Paaren von Zahlen, welche die Verhältnißglieder ausmachen, einerley Unterschied Statt findet, d. h. daß das erste Glied um eben so viel größer ist, als das zweyte, um wie viel das dritte größer ist, als das vierte; oder: daß der Ueberschuß der Einheiten, die ausser dem zweyten Gliede noch im ersten enthalten sind, dem Ueberschusse der Einheiten, die ausser dem vierten Gliede noch im dritten enthalten sind, gleich ist. Demnach besteht in jeder arithmetischen Proportion die Summe der beyden äusseren Glieder

a) aus dem zweyten Gliede,

b) aus dem Ueberschusse der Einheiten, die das erste Glied noch ausser dem zweyten enthält, d. h. der Differenz der Glieder (denn diese zwey Stücke zusammen sind dem ersten Gliede gleich)

c) aus dem vierten Gliede.

Die Summe der beyden mittleren Glieder aber besteht

α) aus dem zweyten Gliede

β) aus dem vierten Gliede

γ) aus dem Ueberschusse der Einheiten, die das dritte Glied noch ausser dem vierten enthält, d. h. der Differenz der Glieder (denn diese zwey Stücke zusammen sind dem dritten Gliede gleich.)

Da man nun, so oft man Gleiches zu Gleichem addirt, gleiche Summen erhält, hier aber die summirenden Theile beyderseits einander stückweise gleich sind;

so müssen nothwendig jedesmal auch die beyden Summen einander gleich werden.

§. 45.

Aus dem vorigen wichtigen Saze fließen nun nachstehende Folgerungen:

I. Das vierte Glied einer abgesonderten arithmetischen Proportion findet man, wenn man von der Summe der beyden mittleren das erste Glied subtrahirt; und das dritte Glied einer stetigen arithmetischen Proportion findet man, wenn man von dem doppelten mittleren Gliede das erste subtrahirt. Z. B. es seyen die drey Glieder der abgesonderten arithmetischen Proportion, 15, 6, 21, und man bezeichne das vierte Glied, welches gesucht wird, durch G, so ist:

$$15 - 6 = 21 - G$$

Hier ist also $G + 15 = 6 + 21 = 27$ (nach dem vorigen §.) Das heißt: es müssen zu dem gesuchten Gliede noch 15 addirt werden, damit es der Zahl 27 gleich wird; offenbar muß also die Zahl 27 um 15 grösser seyn, als das gesuchte Glied, und dieses wird folglich gefunden, wenn man von 27 die Zahl 15 abzieht; es ist also

$$G = 27 - 15 = 12$$

Oder es sey das erste Glied einer stetigen arithmetischen Proportion 37, das mittlere Glied 24, und man soll das dritte Glied derselben finden; bezeichnet man abermals das gesuchte dritte Glied mit G, so ist die Proportion:

$$37 - 24 = 24 - G.$$

Hier ist $G + 37 = 24 + 24 = 48$, folglich, wenn man beyderseits 37 abzieht, (denn Gleiches von Gleichem abgezogen, läßt gleiche Reste.)

$$G = 48 - 37 = 11$$

II. Das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion findet man, wenn man die Summe der beyden äusseren Glieder halbirt. Z. B. es sey

das erste Glied der stetigen arithmetischen Proportion 23, das dritte 11, und man soll das mittlere finden. Bezeichnet man wiederum das gesuchte mittlere Glied durch G, so ist die Proportion:

$$23 - G = G - 11$$

Hier ist $23 + 11 = G + G$ oder $2G = 34$, das heißt, das gesuchte Glied doppelt genommen ist so groß, als die Zahl 34, die Zahl 34 ist also selbst das Doppelte von dem gesuchten Gliede, und mithin das gesuchte Glied die Halfte von 34; demnach ist

$$G = \frac{34}{2} = 17$$

Das mittlere Glied einer arithmetischen Proportion oder die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen zwey andern Zahlen nennt man auch das arithmetische Mittel; und auf eine ganz ähnliche Art, wie man das arithmetische Mittel zwischen zwey Zahlen findet, wird auch im gemeinen Leben sowohl, als in den Wissenschaften aus mehreren Zahlen der Durchschnitt oder die Mittelzahl gefunden, wenn man die Summe derselben durch ihre Anzahl dividirt. Gesezt z. B. es wäre an einem Orte beobachtet worden, daß zehen Jahre nach einander Kinder an den Pocken nach folgenden Zahlen gestorben wären:

im	1ten Jahre	11
im	2ten ——	17
im	3ten ——	9
im	4ten ——	21
im	5ten ——	32
im	6ten ——	19
im	7ten ——	12
im	8ten ——	25
im	9ten ——	28
im	10ten ——	16
		10) 190 | 19

so giebt die Summe aller dieser Zahlen, durch ihre Anzahl dividirt, den Durchschnitt oder die Mittelzahl der Kinder, von denen man annehmen darf, daß sie an diesem Orte alle Jahre von den Pocken aufgerieben werden.

Und solcher Mittelzahlen bedient man sich in allen Fällen mit Vortheil, wenn man keinen Grund hat, unter mehreren Zahlen eine vor den übrigen zu wählen, da man dann solchergestalt eine findet, welche von der Wahrheit nie weit abweichen kann, und ihr immer um so viel näher kommen muß, je grösser die Anzahl der beobachteten Fälle ist.

§. 46.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie einerley Exponenten haben. Zwey gleiche geometrische Verhältnisse geben eine geometrische Proportion. Bey diesen heissen die beyden vorhergehenden Glieder und die beyden nachfolgenden, jedes Paar unter sich, gleichnamige oder ähnlich liegende; alle übrigen Benennungen bleiben wie bey der arithmetischen Proportion.

Auch ist noch zu bemerken, daß, wenn der Name Proportion schlechthin, ohne ein Beywort gebraucht wird, man jedesmal die geometrische Proportion darunter versteht, weil die Alten nur diese Proportion allein betrachtet haben, und folglich zu ihrer Unterscheidung kein Beywort nöthig hatten.

§. 47.

In jeder geometrischen Proportion ist das Product der beyden äussern Glieder dem Producte der beyden mittleren gleich.

Es sey die abgesonderte geometrische Proportion:

$$2 : 6 = 4 : 12$$ (welches gelesen wird:

Wie sich verhält 2 zu 6, so verhält sich 4 zu 12) so ist das Product der beyden äußeren Glieder $= 2 \times 12 = 24$ und das Product der beyden mittleren $= 6 \times 4 = 24$.

Oder es sey die stetige Proportion:

$$4 : 6 = 6 : 9$$

so ist das Product der beyden äußeren Glieder $= 4 \times 9 = 36$ nnd das Product der beyden mittleren $= 6 \times 6 = 36$. Da aber bey der stetigen Proportion die beyden

mittleren Glieder einerley sind, so ist in dieser das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte des mittleren Glieds durch sich selbst gleich. Da nun ein Product, das entstehet, wenn man eine Zahl durch sich selbst multiplicirt, das Quadrat oder die Quadratzahl von dieser Zahl heißt; so ist in jeder stetigen Proportion das Product der beyden äußeren Glieder dem Quadrate des mittleren Glieds gleich.

Daß dieser Satz allgemein von jeder geometrischen Proportion gelte, davon kann man sich aus folgenden Gründen überzeugen:

Nach dem vorigen §. besteht jede geometrische Proportion aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen, und die Gleichheit dieser Verhältnisse beruhet darauf, daß sie beyde einerley Exponenten haben. Sie haben aber einerley Exponenten, wenn das erste Glied im zweyten eben so oft enthalten ist, als das dritte im vierten, das heißt, wenn das zweyte Glied ein Product aus dem ersten in den Exponenten, und das vierte Glied ein Product aus dem dritten in denselben Exponenten ist, welcher übrigens eben sowohl eine gebrochene, als eine ganze Zahl seyn kann. Macht man nun die Producte der äußeren und mittleren Glieder, so hat

das Product der äußeren Glieder zu seinen Factoren

a) das erste Glied,

b) den Exponenten,

c) das dritte Glied, (denn das Product aus den lezten beyden, ist dem vierten Gliede gleich.)

Das Product der mittleren Glieder aber hat zu Factoren

α) das erste Glied,

β) den Exponenten, (denn das Product aus diesen beyden, ist dem zweyten Gliede gleich)

γ) das dritte Glied.

Da man nun, so oft man Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gleiche Producte erhält, hier aber die Factoren beyderseits stückweise gleich sind, so müssen noth-

wendig jedesmal auch die beyden Producte einander gleich werden.

§. 48.

Aus dem vorigen Lehrsatze, welcher die Grundlage der ganzen Lehre von den Proportionen ausmacht, fließen nachstehende Folgerungen.

I. Das vierte Glied einer abgesonderten Proportion findet man, wenn man das Product der mittleren Glieder durch das erste Glied dividirt; und das dritte Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man das Quadrat des mittleren Glieds mit dem ersten Gliede dividirt.

Es sey die abgesonderte geometrische Proportion:

$$4 : 6 = 8 : G$$

Wo G das gesuchte vierte Glied bedeutet, so ist (nach dem vorigen §.)

$$4 \times G = 6 \times 8$$

und daher, wenn man beyderseits mit 4 dividirt,

$$G = \frac{6 \times 8}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

Oder es sey die stetige Proportion:

$$2 : 4 = 4 : G$$

Wo G wiederum das gesuchte Glied bedeutet, so ist (nach dem vorigen §.)

$$2 \times G = 4 \times 4$$

und daher, wenn man beyderseits mit 2 dividirt,

$$G = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

II. Da (nach dem vorigen §.) in jeder stetigen Proportion das Quadrat des mittleren Glieds dem Producte der beyden äußeren gleich, folglich dieses Product selbst ein Quadrat ist, so würde man aus den gegebenen beyden äußeren Gliedern und ihrem zugleich bekannten Producte, das mittlere Glied finden können, wenn man nur wüßte, was für eine Zahl, wenn sie mit sich selbst multiplicirt wird, jenes Product hervorbrächte. Diese

Zahl heißt die Quadratwurzel von jenem Producte, und das Verfahren, dessen man sich bedient, um aus einer gegebenen Quadratzahl ihre Wurzel zu finden, wird das Ausziehen der Quadratwurzel genannt.

Demnach wird das mittlere Glied einer stetigen Proportion gefunden, wenn man aus dem Producte der äusseren Glieder die Quadratwurzel auszieht.

Die Quadratwurzeln von den Quadraten der Zahlen von 1 bis 10 hat man in dem Einmaleins. Um diejenigen Quadratwurzeln, welche über 10 gehen, zu finden, muß man eine eigene arithmetische Operation anwenden, deren Erklärung in der Folge ein besonderer Abschnitt gewidmet werden wird.

Es seyen z. B. die beyden äußeren Glieder einer stetigen Proportion 2 und 8, und man soll das mittlere Glied finden. Bezeichnet man dieses, als das gesuchte, mit G, so ist

$$2 : G = G : 8.$$

Demnach $G \times G$ oder das Quadrat von $G = 2 \times 8 = 16$. Folglich die Wurzel von G oder das gesuchte mittlere Glied $= 4$.

Es seyen ferner die beyden äußeren Glieder einer stetigen Proportion 3 und 27, und man soll das mittlere Glied finden, so ist

$$3 : G = G : 27.$$

Demnach das Quadrat von $G = 3 \times 27 = 81$ und folglich die Wurzel dieses Quadrats, oder das gesuchte mittlere Glied $= 9$.

Es seyen die beyden äußeren Glieder 2 und 18, man soll das mittlere Glied finden, so ist

$$2 : G = G : 18.$$

Demnach das Quadrat von $G = 2 \times 18 = 36$, mithin die Wurzel dieses Quadrats, oder $G = 6$.

Es seyen gegeben die beyden äußeren Glieder 4 und 16, man soll das mittlere Glied finden, so ist

$$4 : G = G : 6.$$

Demnach das Quadrat von $G = 4 \times 16 = 64$, davon die Wurzel, oder $G = 8$.

§. 49.

Wenn vier Zahlen so beschaffen sind, daß das Product der beyden äußeren dem Producte der beyden mittleren gleich ist, so stehen die vier Zahlen in einer geometrischen Proportion.

Es sey das Product der beyden äußeren Glieder $= 5 \times 18$, und das Product der beyden mittleren $= 15 \times 6$, so ist $5 : 15 = 6 : 18$ eine geometrische Proportion. Daß aber der Satz nicht nur bey diesem Beyspiele zutreffe, sondern allgemein wahr sey, läßt sich folgendermaßen zeigen:

Sind die Producte der äußeren und mittleren Glieder gleich, so müssen es auch deren Factoren seyn, denn nur Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt gleiche Producte. Allein nach der Voraussezung sind die beyden äußeren und die beyden mittleren Glieder vier verschiedene Zahlen. Sollen sie also doch, wenn man jene zwey und diese zwey miteinander multiplicirt, gleiche Producte geben, so ist dies nur unter einer einzigen Bedingung möglich, wenn nämlich unter jedem Paare eine zusammengesezte Zahl sich befindet, und zwar so, daß der zusammengesezte Factor unter den äußeren Gliedern zu seinen Factoren hat: 1) den einfachen Factor der mittleren, 2) noch einen andern, den wir in Ermanglung einer schicklicheren Benennung der Kürze wegen Subfactor nennen wollen, der zusammengesezte Factor unter den mittleren Gliedern hingegen zu Factoren hat: 1) den einfachen Factor der äußeren, 2) den nämlichen Subfactor. Denn nur dadurch allein werden die Factoren, und folglich auch die Producte, beyderseits gleich. Nun zeigt (nach §. 42.) der Subfactor bey dem Producte der äußeren Glieder das Verhältniß des einfachen Factors der mittleren Glieder zum zusammengesezten der äußeren, bey dem Producte der mittleren Glieder hingegen das Verhältniß des einfachen Factors der äußeren Glieder zum zusammengesezten der mittleren. Dieser Subfactor ist also der Exponent der genannten Verhältnisse, und da er beyderseits gleich ist, so sind folglich

(nach §. 46.) auch die Verhältnisse einander gleich; das heißt, der einfache Factor der äußeren Glieder hat zum zusammengesezten der mittleren eben das Verhältniß, was der einfache Factor der mittleren zum zusammengesezten der äußeren Glieder hat, oder diese vier Glieder stehen in geometrischer Proportion.

Das oben gegebene Beyspiel ist demnach also anzusehen:

$$5 \times (3 \times 6) = 6 \times (3 \times 5)$$

wo nun 5 der einfache Factor der äußeren, 6 der einfache Factor der mittleren Glieder, und 3 der gemeinschaftliche Subfactor ist.

Daß übrigens die Benennungen: einfach und zusammengesezt, hier bloß comparativ genommen seyen, wird kaum nöthig seyn, zu erinnern.

So oft man demnach zwey gleiche Producte hat, deren jedes aus zwey Factoren zusammengesezt ist, so kann man daraus eine Proportion herleiten, indem man schließt: Wie sich verhält der eine Factor des einen Products zum einen Factor des andern, so verhält sich der zweyte Factor des andern Products zum zweyten Factor des ersten.

§. 50.

Jede geometrische Proportion läßt sich auf mannigfaltige Art abändern, und bleibt bey allen Veränderungen immer eine geometrische Proportion, so lange man zeigen kann, daß nach geschehener Veränderung das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte der beyden mittleren noch gleich sey, denn dies ist nach dem vorigen §. das allgemeine Merkmal der zwischen vier Zahlen Statt habenden Proportionalität.

Es sey z. B. die geometrische Proportion:

$$6 : 18 = 8 : 24$$

so kann man sie auf folgende Arten verändern:

I. Durch Versezung der Glieder, indem man nämlich sezt: Das Vorderglied zum Vordergliede, wie das Hinterglied zum Hintergliede, also:

6 : 8 = 18 : 24. Hier ist nun 6 × 24 = 8 × 18, oder 144 = 144.

II. Durch Umkehrung der Glieder, indem man sezt: Das Hinterglied zum Vorderglied, wie das Hinterglied zum Vorderglied, also:

18 : 6 = 24 : 8 : hier ist abermal 18 × 8 = 6 × 24, oder 144 = 144.

III. Durch Addition der Glieder, indem man sezt:

1) Die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, wie die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, also:

(6 + 18) : 18 = (8 + 24) : 24 oder
24 : 18 = 32 : 24,
hier ist 24 × 24 = 18 × 32, das ist 576 = 576.

Oder indem man sezt:

2) Das Vorderglied zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, wie das Vorderglied zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, also:

6 : (6 + 18) = 8 : 8 + 24) oder
6 : 24 = 8 : 32; hier ist 6 × 32 = 8 × 24, oder 192 = 192.

IV. Durch Subtraction der Glieder, indem man sezt:

1) Wie der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, so der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, also:

(18 — 6) : 18 = (24 — 8) : 24, oder
12 : 18 = 16 : 24.
Hier ist 12 × 24 = 18 × 16, oder 288 = 288.

Oder indem man sezt:

2) Wie der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Vordergliede, so der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Vordergliede, also:

(18 — 6) : 6 = (24 — 8) : 8 oder
12 : 6 = 16 : 8.

Hier ist 12 × 8 = 6 × 16, oder 96 = 96.

V. Durch Addition und Subtraction der Glieder zugleich, indem man sezt:

1) Wie die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Unterschiede des Vorderglieds und Hinterglieds, so die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Unterschiede des Vorderglieds und Hinterglieds, also:

(6 + 18 : (18 — 6) = (8 + 24) : (24 — 8)

oder:

24 : 12 = 32 : 16.

Hier ist 24 × 16 = 12 × 32, oder 384 = 384.

Oder indem man sezt:

2) Wie der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, so der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, also:

(18 — 6) : (6 + 18) = (24 — 8) : (8 + 24)

oder:

12 : 24 = 16 : 32.

Hier ist abermal 12 × 32 : 24 × 16, oder 348 = 384.

VI. Durch Multiplication der Glieder, indem man entweder die beyden Vorderglieder oder die beyden Hinterglieder oder Vorder- und Hinterglieder zugleich mit einerley Zahl, oder die Vorderglieder mit einer und die Hinterglieder mit einer andern Zahl multiplicirt.

1) Multiplicirt man in der Proportion 6 : 18 = 8 : 24 die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2, so erhält man die Proportion:

12 : 18 = 16 : 24,

und hier ist 12 × 24 = 18 × 16, oder 288 = 288.

2) Wenn man in der Proportion 6 : 18 = 8 : 24 die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 multiplicirt, so wird daraus die Proportion:

$$6 : 54 = 8 : 72,$$

und in dieser ist $6 \times 72 = 8 \times 54$, oder $432 = 432$.

3) Wenn man in eben dieser Proportion die beyden Vorderglieder mit der Zahl 5 und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 2 multiplicirt, so entstehet die Proportion:

$$30 : 36 = 40 : 48,$$

und dabey ist $30 \times 48 = 36 \times 40$, oder $140 = 140$.

4) Wenn man in der vorigen Proportion alle vier Glieder mit der Zahl 6 multiplicirt, so erhält man die Proportion:

$$36 : 108 = 48 : 144,$$

und in dieser ist $36 \times 144 = 108 \times 48$, oder $5184 = 5184$.

VII. Durch Division der Glieder, indem man entweder die beyden Vorderglieder oder die beyden Hinterglieder, oder Vorder- und Hinterglieder zugleich mit einerley Zahl, oder die Vorderglieder mit einer, und die Hinterglieder mit einer andern Zahl dividirt.

1) Wenn man in der Proportion 6 : 18 = 8 : 24 die beyden Vorderglieder, bey unveränderten Hintergliedern, mit der Zahl 2 dividirt, so erhält man daraus die Proportion:

$$3 : 18 = 4 : 24,$$

und in dieser ist $3 \times 24 = 4 \times 18$, oder $72 = 72$.

2) Wenn man in der vorigen Proportion, bey unveränderten Vordergliedern, die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 dividirt, so erhält man die Proportion:

$$6 : 6 = 8 : 8,$$

und in dieser ist $6 \times 8 = 6 \times 8$, oder $48 = 48$.

3) Wenn man in eben dieser Proportion alle vier Glieder durch die Zahl 2 dividirt, so erhält man daraus die Proportion:

$$3 : 9 = 4 : 12,$$

und hierin ist $3 \times 12 = 4 \times 9$, oder $36 = 36$.

4) Wenn man endlich in eben dieser Proportion die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2 und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 6 dividirt, so entstehet daraus die Proportion:

$$3 : 3 = 4 : 4,$$

und hierin ist $3 \times 4 = 3 \times 4$, oder $12 = 12$.

VIII. Durch Multiplication und Division der Glieder zugleich, indem man die Veränderungen von Nro. VI. und VII. combinirt.

1) Wenn man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2 multiplicirt und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 dividirt, so erhält man die Proportion:

$$12 : 6 = 16 : 8,$$

in welcher $12 \times 8 = 16 \times 6$ oder $96 = 96$ ist.

2) Wenn man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2 dividirt und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 multiplicirt, so erhält man die Proportion:

$$3 : 54 = 4 : 72,$$

in welcher $3 \times 72 = 4 \times 54$ oder $216 = 216$ ist.

Die hier geführten Beweise aller dieser Säze gelten zwar eigentlich nur für das gewählte Beyspiel; sie können aber leicht allgemein gemacht werden, wenn man die Glieder der dabey zum Grunde gelegten Proportion durch allgemeine Zeichen ausdrückt.

Wählt man z. B. zu Bezeichnung des ersten Gliedes die römische Ziffer I, zu Bezeichnung des dritten die römische Ziffer III, und zu Bezeichnung des Exponenten den Buchstaben E, so lässet sich das zweyte Glied durch $I \asymp E$, und das

vierte durch III ⋊ E ausdrücken, weil (nach §. 47.) jenes ein Product aus dem ersten in den Exponenten, dieses aber ein Product aus dem dritten in denselben Exponenten ist.

Und vermittelst dieser Zeichen kann man nun die Beweise der obigen Säze leicht auf folgende Art allgemein machen:

Durch die Veränderung unter Nro. I wird aus der ursprünglichen Proportion

6 : 18 = 8 : 24 d. h. I : I ⋊ E = III : III ⋊ E

diese

6 : 8 = 18 : 24 d. h. I : III = I ⋊ E : III ⋊ E;

und die Zulässigkeit dieser Veränderung ist daraus erweislich, daß in der lezten Proportion so gut wie in der ersten das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren gleich wird, denn es ist in einem Falle wie im andern I ⋊ III ⋊ E = I ⋊ III ⋊ E.

Durch die Veränderung unter Nro. II. wird aus der ursprünglichen Proportion

6 : 18 = 8 : 24 d. h. I : I ⋊ E = III : III ⋊ E

diese

18 : 6 = 24 : 8 d. h. I ⋊ E : I = III ⋊ E : III;

und die Zulässigkeit dieser Veränderung folgt wiederum daraus, daß auch hier das Product der äußeren so wie das Product der mittleren Glieder = I ⋊ III ⋊ E wird.

Da nun auf diese Art die Nothwendigkeit der Gleichheit dieser beyden Producte aus einem allgemeinen, aus dem Begriffe der Proportion selbst abgeleiteten, Ausdrucke dargethan ist, unter welchen eben deßwegen jede gedenkbare Proportion muß gebracht werden können, und da die Gleichheit der mehrerwähnten Producte (nach dem vorigen §.) das allgemeine Merkmal der zwischen vier Zahlen Statt findenden Proportionalität ist, so ist eben damit die Zulässigkeit jener Veränderungen in ihrer völligen Allgemeinheit erwiesen.

Ebenso kann man die Beweise der übrigen Säze dieses und aller nachfolgenden §. §. bis zum Ende dieses Abschnitts allgemein machen.

Andere allgemeine Beweise derselben werden spä-terhin vermittelst der Buchstabenformeln gegeben werden.

§. 51.

Wenn zwey Proportionen von der Art sind, daß die Hinterglieder der einen den Vordergliedern der an-dern gleich sind, so verhält sich das erste Glied der er-sten Proportion zum zweyten Glied der zweyten wie das dritte Glied der ersten zum vierten Gliede der zwey-ten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{l} 4 : 9 = 12 : 27 \text{ und} \\ 9 : 11 = 27 : 33 \text{ so ist} \\ \hline 4 : 11 = 12 : 33 \end{array}$$

und in dieser Proportion ist $4 \times 33 = 11 \times 12$, oder $132 = 132$.

§. 52.

Wenn daher zwey Proportionen so beschaffen sind, daß die Hinterglieder der einen, den Hintergliedern der andern gleich sind, so verhält sich das erste Glied der ersten Proportion zum ersten Gliede der zweyten wie das dritte Glied der ersten zum dritten Gliede der zweyten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{l} 3 : 7 = 6 : 14 \text{ und} \\ 4 : 7 = 8 : 14 \text{ so ist} \\ \hline 3 : 4 = 6 : 8 \end{array}$$

und in dieser ist $3 \times 8 = 4 \times 6$, oder $24 = 24$.

Kehrt man hier die zweyte Proportion um, so hat man den Fall des vorigen §.

§. 53.

Wenn zwey Proportionen so beschaffen sind, daß die Vorderglieder der einen den Vordergliedern der an-dern gleich sind, so verhält sich auch das zweyte Glied der ersten Proportion zum zweyten Gliede der zweyten wie das vierte Glied der ersten zum vierten Gliede der zweyten. Z. B. es seyen die Proportionen:

5 : 11 = 10 : 22 und
5 : 15 = 10 : 30 so ist
11 : 15 = 22 : 30

und hierin ist 10 ⋈ 30 = 15 ⋈ 22, oder 330 = 330.

Kehrt man hier die erste Proportion um, so hat man den Fall des §. 50.

§. 54.

Wenn in zwey Proportionen das zweyte Glied der ersten dem ersten Gliede der zweyten, und das dritte Glied der ersten dem vierten Gliede der zweyten gleich ist, so verhält sich das erste Glied der ersten zum zweyten Gliede der zweyten wie das dritte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten. Z. B. es seyen die Proportionen:

6 : 16 = 15 : 40 und
16 : 5 = 48 : 15 so ist
6 : 5 = 48 : 40

und hierin ist 6 ⋈ 40 = 5 ⋈ 48, oder 240 = 240.

§. 55.

Wenn daher in zwey Proportionen die mittleren Glieder der einen den mittleren Gliedern der andern gleich sind, so verhält sich das erste Glied der ersten zum ersten Gliede der zweyten wie das vierte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten. Z. B. es seyen die Proportionen:

7 : 18 = 21 : 54 und
14 : 18 = 21 : 27 so ist
7 : 14 = 27 : 54

und hierin ist 7 ⋈ 54 = 14 ⋈ 27, oder 378 = 378.

Kehrt man hier die zweyte Proportion um, so hat man wiederum den Fall des vorigen §.

§. 56.

Wenn man in zwey Proportionen die Glieder der einen durch die Glieder der andern nach der Reihe multiplicirt, so geben auch diese Producte eine Proportion. Es seyen die beyde Proportionen:

$$4 : 8 = 7 : 14$$
$$2 : 6 = 5 : 15$$

man multiplicire der Reihe nach alle Glieder der ersten durch die gleichnamigen Glieder der zweyten, so werden die Producte $2 \times 4 : 6 \times 8 = 5 \times 7 : 14 \times 15$, oder $8 : 48 = 35 : 210$ und dies ist wieder eine Proportion, denn es ist in derselben $8 \times 210 = 48 \times 35$, oder $1680 = 1680$.

§. 57.

Wenn zwey oder mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied des einen das Vorderglied im nächstfolgenden ist, so sagt man, das Verhältniß des ersten Glieds zum lezten sey aus allen diesen Verhältnissen, oder aus andern, die ihnen gleich sind, zusammengesezt. Z. B. wenn man die Verhältnisse hat,

$$2 : 4 = 5 : 10$$
$$4 : 8 = 6 : 12$$
$$8 : 16 = 7 : 14 \quad \text{u. s. w.}$$

so heißt das Verhältniß $2 : 8$ aus den beyden Verhältnissen $2 : 4$ und $4 : 8$, oder den ihnen gleichen Verhältnissen $5 : 10$ und $6 : 12$ zusammengesezt, eben so heißt das Verhältniß $2 : 16$ aus den Verhältnissen $2 : 4$, $4 : 8$ und $8 : 16$, oder den ihnen gleichen Verhältnissen $5 : 10$, $6 : 12$ und $7 : 14$ zusammengesezt. Die Bezeichnung der zusammengesezten Verhältnisse ist folgende:

$$2:8 = \left\{\begin{matrix} 2 : 4 \\ 4 : 8 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5 : 10 \\ 6 : 12 \end{matrix}\right\} \qquad 2 : 16 = \left\{\begin{matrix} 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5 : 10 \\ 6 : 12 \\ 7 : 14 \end{matrix}\right\}$$

§. 58.

Wenn ein Verhältniß aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesezt ist, so heißt es ein zweymal höheres oder duplicirtes, ist es aus drey gleichen Verhältnissen zusammengesezt, so heißt es ein dreymal höheres oder triplicirtes Verhältniß, u. s. w. das ist, wenn:

$$\begin{aligned} 2 &: 4 = 5 : 10 \\ 4 &: 8 = 5 : 10 \\ 8 &: 16 = 5 : 10 \end{aligned}$$ so ist

$$2:8 = \left\{\begin{matrix} 2:4 \\ 4:8 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5:10 \\ 5:10 \end{matrix}\right\} \quad 2:16 = \left\{\begin{matrix} 2:4 \\ 4:8 \\ 8:16 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5:10 \\ 5:10 \\ 5:10 \end{matrix}\right\}$$

und man sagt 2 : 8 stehe im zweymal höheren oder duplicirten Verhältnisse von dem Verhältnisse 2 : 4 oder 5 : 10, und 2 : 16 stehe in dem dreymal höheren oder triplicirten Verhältnisse von dem Verhältnisse 3 : 4 oder 5 : 10. Umgekehrt nennt man das einfache Verhältniß 2 : 4 oder 5 : 10 in Ansehung des zweymal höheren oder duplicirten, 2 : 8, das zweymal niedrigere oder subduplicirte, und in Ansehung des dreymal höheren oder triplicirten, 2 : 16, das dreymal niedrigere oder subtriplicirte. Und im Allgemeinen heißt ein zusammengesetztes Verhältniß ein um so vielmal höheres Verhältniß, als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse, woraus es zusammengesezt ist, beträgt. Und im Gegentheil heißt das einfache Verhältniß ein um so vielmal niedrigeres Verhältniß, als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse beträgt, woraus das zusammengesezte bestehet.

§. 59.

Wenn das Verhältniß zweyer Zahlen aus mehreren Zahlenverhältnissen zusammengesezt ist, so verhält sich die erste Zahl zur zweyten wie das Product aller Vorderglieder zum Producte aller Hinterglieder in den einfachen Zahlenverhältnissen. Z. B. es sey:

2 : 4 = 5 : 10
4 : 8 = 6 : 12
8 : 16 = 7 : 14 so iſt

2 : 8 = 5 ⋈ 6 : 10 ⋈ 12

oder

2 : 8 = 30 : 120

Denn hier iſt 8 ⋈ 30 = 2 ⋈ 120 oder 240 = 240.

Eben ſo iſt auch 2 : 16 = 5 ⋈ 6 ⋈ 7 : 10 ⋈ 12 ⋈ 14
oder 2 : 16 = 210 : 1680.

Denn hier iſt 2 ⋈ 1680 = 16 ⋈ 210 oder 3360 = 3360.

Fünfter Abschnitt.

Anwendungen der Lehre von den Proportionen, oder praktische Rechnungsregeln.

§. 60.

Die Anwendungen der Lehre von den Proportionen auf die bey den Geschäften des bürgerlichen Lebens vorfallenden Berechnungen sind so mannigfaltig und ausgebreitet, als diese Geschäfte selbst. Eine der vornehmsten dieser Anwendungen ist die Regel de Tri (regula de tribus terminis). Sie ist nichts anders als die Vorschrift, wie man zu drey gegebenen zählbaren Größen die vierte geometrische Proportionalgröße finden kann. Sie heißt demnach also:

Man multiplicire die Zahl der dritten Größe durch die Zahl der zweyten, und dividire das Product durch die Zahl der ersten, so giebt der Quotient die Zahl der verlangten vierten Proportionalgröße.

Es erhellet hieraus von selbst, daß diese Regel nichts anders als eine unmittelbare Anwendung von der Aufgabe des 48. §. sey. Wegen ihres großen und allgemeinen Nuzens sowohl in der ganzen Mathematik, als auch bey solchen Rechnungsfragen, die im bürgerlichen Leben, beym Handel und bey allen Arten der

Handthierungen und Gewerbe vorkommen, nennt man die Regel de Tri sonst auch die goldene Regel.

§. 61.

Aus der im vorigen §. gegebenen Erklärung der Regel de Tri folgt, daß wenn aus drey gegebenen Größen eine vierte nach dieser Regel gesucht werden solle, diese vier Größen allemal in einer geometrischen Proportion, oder allemal zwey und zwey von ihnen in einem geometrischen Verhältnisse stehen müssen. Hier sind aber zwey Fälle möglich; zwey Größen können nämlich entweder so mit einander in einem geometrischen Verhältnisse stehen, daß, da die eine zu- oder abnimmt, zugleich auch die andere zu- oder abnimmt; dies nennt man alsdann das gerade Verhältniß. Oder zwey Größen können solcher Gestalt in einem geometrischen Verhältnisse stehen, daß die eine abnimmt, indem die andere zunimmt, oder daß die eine wächset, indem die andere abnimmt; und dies nennt man das umgekehrte Verhältniß. Das gerade Verhältniß findet also allemal Statt, so oft man sagen kann: je mehr des einen, destomehr des andern, oder: je weniger des einen, desto weniger des andern; z. B. bey Mengen und Preisen der Waaren, bey Zeit und Lohn der Arbeit u. s. w. Hingegen findet das umgekehrte Verhältniß in allen den Fällen Statt, wo man sagen kann: je weniger des einen, desto mehr des andern; oder: je mehr des einen, desto weniger des andern; z. B. bey Zeit der Arbeit und Menge der Arbeiter. Dieser Unterschied des geraden und umgekehrten Verhältnisses hat zur Unterscheidung der geraden oder ordentlichen und der verkehrten Regel de Tri Anlaß gegeben, ungeachtet diese Eintheilung gar nicht die Regel de Tri selbst, sondern bloß die Ordnung betrifft, nach welcher die gegebenen Größen in der Proportion zu sezen sind. Bey dem Gebrauche der Regel de Tri kommt es demnach hauptsächlich auf die Beurtheilung an, theils ob die gegebenen Größen mit der gesuchten in einer geometrischen Proportion stehen, theils in welcher Ordnung die Glieder dieser Proportion aufeinander folgen müssen. Beydes muß man jedesmal aus der

Betrachtung der Natur dieser Größen herzuleiten wissen. Was aber die Verhältnisse der Dinge selbst, womit wir bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens zu thun haben, anbelangt, so lernt man diese von Jugend auf, wenigstens großentheils, gelegentlich ohne besondere Anweisung kennen; viele sind durch Gesetze, andere durch eingeführte Gewohnheiten bestimmt. Allemal muß man aber davon gehörig unterrichtet seyn, bevor man im Stande ist, irgend eine dahin gehörige Aufgabe aufzulösen.

§. 62.

Zur sogenannten geraden oder ordentlichen Regel de Tri gehören unter andern vornehmlich folgende Fälle:

I. Die Reductionsrechnung, da man eine benannte Zahl auf einen andern Namen bringt. Wenn eine gewisse Menge von Einheiten der einen Benennung so viel ausmacht, als eine andere Menge Einheiten von anderer Benennung, so sieht man leicht, daß die doppelte Anzahl von Einheiten der ersten Art so viel ausmache, als die doppelte Anzahl von Einheiten der andern Art, u. s. w. Z. B. wenn 1 Gulden 60 Kreuzer macht, so müssen 2 × 1 Gulden 2 × 60 Kreuzer machen. Demnach verhält sich:

1 Gulden zu jeder Anzahl Gulden, wie 60 Kreuzer zu den, der im zweyten Gliede angenommenen Anzahl Gulden, zugehörigen Kreuzern.

Dies ist der Grund aller Reductionen der mancherley Maaße, Münzen und Gewichte auf andere, wenn man weiß, wie viel von der einen Art eine gewisse Menge der andern ausmachen.

Da nun überhaupt nur gleichartige Größen ein Verhältniß zu einander haben können, so müssen unter den drey gegebenen Zahlen immer zwey seyn, die einerley Namen haben, oder doch auf einerley Namen gebracht werden können, und die dritte von den gegebenen Zahlen muß mit der gesuchten von einerley Art seyn, oder einerley Namen haben.

Wenn nun die Auflösung einer Aufgabe von der Erfindung der vierten Proportionalgröße zu drey gegebenen zählbaren Größen abhängt, so wird man die hierzu nöthige Proportion immer am sichersten nach folgender Regel ansezen können:

Man bringe die gesuchte Größe in die vierte Stelle, und was mit ihr von einerley Art ist, oder einerley Namen hat, in die dritte, was mit dieser, als durch sie bestimmt, oder sie bestimmend, zusammen gehört, in die erste, und was mit dieser von einerley Art ist, oder einerley Namen hat, in die zweyte.

Z. B. wenn die Frage ist: wie viel Kreuzer machen 25 Gulden, wenn 1 Gulden 60 Kreuzer hat? so ist das gesuchte Glied eine gewisse Anzahl von Kreuzern. Bezeichnet man nun das gesuchte Glied im Allgemeinen mit G (um an den Begriff des Gesuchten zu erinnern), so seze man hier in die Stelle des vierten Glieds G Kreuzer. Zu diesen G Kreuzern kann kein anderes von den gegebenen Gliedern ein Verhältniß haben, als das, was auch den Namen der Kreuzer führt. Dies ist das Glied 60 Kreuzer; dieses muß also hier in die Stelle des dritten Glieds zu stehen kommen. Mit diesen 60 Kreuzern gehört das Glied 1 fl. insofern zusammen, als der Werth von 1 fl. durch 60 Kreuzer bestimmt wird, folglich muß das Glied 1 fl. hier die Stelle des ersten Gliedes einnehmen, damit es in dem ersten Verhältnisse der Proportion das Vorderglied werde, wie in deu zweyteu Verhältnisse desselben das mit ihm zusammen gehörige Glied 60 Kreuzer das Vorderglied ist. Mit diesem Gliede 1 fl. aber hat kein anderes von den gegebenen Gliedern einerley Namen, als das Glied 25 fl.; folglich muß dieses hier die Stelle des zweyten Gliedes erhalten. Und damit ist dann die Proportion vollendet.

Sie wird demnach so stehen

fl. fl. Kr. Kr.
1 : 25 = 60 : G

und daraus erhält man $G = \frac{60 \times 25}{1} = 60 \times 25$
= 1500 Kr.

Auf diese Weise ist es einleuchtend, daß bey der Bildung einer Proportion durchaus nichts Wesentliches von zufälligen Umständen abhängig oder der Willkühr überlassen, sondern vielmehr alles durch die Natur der Sachen selbst nothwendig und unabänderlich bestimmt sey. Und dieses Bewußtseyn ist es allein, was uns auch hier in allen Fällen der Anwendung diejenige Sicherheit gewähren kann, welche bey allen mathematischen Operationen das erste Erforderniß ist.

Die Zahl, welche angiebt, wie viele Maaße, Münzen oder Gewichte unter der einen Benennung Eins unter einem andern Namen ausmachen, nennt man die Reductionszahl; wenn diese ein Bruch ist, so läßt sich daraus unmittelbar der Reductionssaz folgern, welcher ausdrückt, wie viel Stücke man von jedem Namen nehmen muß, um unter einem andern Namen an Werthe gleich viel zu erhalten. Z. B. wenn 1 Gulden $= \frac{2}{3}$ Thaler ist, so folgt daraus, daß 3 Gulden = 2 Thaler sind. Eben so giebt dieser Reductionssaz das Verhältniß zweyer an sich gleichartigen Größen an, die nur verschiedene Namen führen; denn wenn man weiß, daß 3 fl. = 2 Thlr. sind, so folgt daraus (nach §. 49.) es sey: 1 fl. : 1 Thlr. = 2 : 3. Umgekehrt, wenn das Verhältniß der einen Größe gegen die andere in Zahlen gegeben ist, so folgt daraus der Reductionssaz; z. B. aus der Proportion 1 fl. : 1 Thlr. = 2 : 3 folgt (nach §. 47.), daß 2 Thlr. = 3 fl.

Weil Niemand die Reductionszahl oder den Reductionssaz wissen kann, wenn es darauf ankommt, die in verschiedenen Ländern so sehr verschiedenen Münzen, Maaße und Gewichte mit einander zu vergleichen, so hat man dazu besondere Vergleichungstafeln nöthig, welche diese Zahlen ein für allemal angeben.

Aus solchen Tafeln weiß man, daß:

1 Pariser Fuß = 1440 Punkte
1 Londner Fuß = 1351 Pkt.
1 Rheinld. Fuß = 1391 Pkt.

Eben so weiß man, daß

1 Hamburger Pfund = 7980 Grane
1 Frankfurter Pf. = 7683 Gr.
1 Amsterdamer Pf. = 8152 Gr.
1 Nürnberger Pf. = 8385 Gr.

Für zwey dergleichen Fußmaaße oder Gewichte erhält man also den Reductionssaz, wenn man in der Proportion, welche die Tafel zwischen zweyen Fußmaaßen oder Gewichten oder den daneben stehenden Zahlen angiebt, die beyden mittleren Glieder und die beyden äußeren mit einander multiplicirt. Z. B. es ist vermöge des Obigen:

1 Pariser Fuß : 1 Londner Fuß = 1440 : 1351
demnach 1351 Pariser Fuß = 1440 Londner Fuß.

Eben so ist, da

1 Pariser Fuß : 1 Rheinld. Fuß = 1440 : 1391
1391 Pariser Fuß = 1440 Rheinländ. Fuß.

Da ferner

1 Frankfurter Pf. : 1 Amsterd. Pf. = 1783 : 8152,
so ist 8152 Frankfurter Pf. = 7683 Amsterd. Pf.

Eben so da

1 Hamburger Pf. : 1 Nürnberg. Pf. = 7980 : 8385,
so ist 8385 Hamburger Pf. = 7980 Nürnberg. Pf.

Hiernach werden folgende Aufgaben aufgelöset:

Aufgabe. Wie viel Londner Fuß geben 856 Pariser Fuß?

1 Pariser Fuß : 1 Londner Fuß = 1440 : 1351
also 1351 Pariser Fuß = 1440 Londner Fuß
und mithin
1351 Par. Fuß : 856 Par. Fuß = 1440 Lond. Fuß : G

$$G = \frac{1440 \times 856}{1351} = \frac{1232640}{1351} = 912\,\frac{528}{1351}$$

Aufgabe. Wie viel Pariser Fuß geben 648 Rheinländische Fuß?

1 Rheinld. Fuß : 1 Pariser Fuß = 1391 : 1440
also 1140 Rheinld. Fuß = 1391 Pariser Fuß.
und mithin
1440 Rhld. Fuß : 648 Rhld. Fuß = 1391 Par. Fuß : G

$$G = \frac{1391 \times 648}{1440} = \frac{901368}{1440} = 625\,\frac{1368}{1440}$$

Aufgabe. Wie viel Nürnberger ℔ geben 1364 Frankfurter ℔.

1 Frankfurter ℔ : 1 Nürnberger ℔ = 7683 : 8385
demnach 8385 Frankfurter ℔ = 7683 Nürnberger ℔
und mithin
8385 Frkf. ℔ : 1364 Frkf. ℔ = 7683 Nürnb. ℔ : G

$$G = \frac{7683 \times 1364}{8385} = \frac{10479612}{8385} = 1249\frac{6747}{8385}$$

Aufgabe. Wie viel Amsterdamer ℔ geben 986 Hamburger ℔?

1 Hamburger ℔ : 1 Amsterd. ℔ = 7980 : 8152
demnach 8152 Hamburg. ℔ = 7980 Amsterdamer ℔
und mithin
8152 Hamb. ℔ : 986 Hamb. ℔ = 7980 Amst. ℔ : G

$$G = \frac{7980 \times 986}{8152} = \frac{7867280}{8152} = 965\frac{1600}{8152} = 965\frac{200}{1019}$$

Aufgabe. Wie viel Amsterdamer ℔ geben 2745 Frankfurter ℔?

1 Frankf. ℔ : 1 Amsterdamer ℔ = 7683 : 8152
also 8152 Frankfurter ℔ = 7683 Amsterdamer ℔
und mithin
8152 Frkf. ℔ : 2745 Frkf. ℔ = 7683 Amst. ℔ : G

$$G = \frac{7683 \times 2745}{8152} = \frac{21089835}{8152} = 2587\frac{611}{8152}$$

Aufgabe. Wie viel Nürnberger ℔ geben 2364 Hamburger ℔?

1 Hamburger ℔ : 1 Nürnberg. ℔ = 7980 : 8385
also 8385 Hamburger ℔ = 7980 Nürnberger ℔
und mithin
8385 Hmb. ℔ : 2364 Hmb. ℔ = 7980 Nrnb. ℔ : G

$$G = \frac{7980 \times 2364}{8385} = \frac{18864701}{8385} = 2249\frac{6855}{8385} = 2249\frac{1371}{1677}$$

II. Die Berechnung der Waaren und Preise. Bey Kauf und Verkauf verhält sich nämlich die Menge von einerley Waare, die man nach Maaß und Gewicht bestimmt, wie der dafür zu bezahlende Preis. Weiß man demnach, wie viel eine gewisse Menge von einer Waare kostet, so läßt sich für jede andere Menge eben dieser Waare der Preis, und für jeden gegebenen Preis die zugehörige

Menge dieser Waare berechnen. Z. B. wenn von einer gewissen Waare 1 Pfund 11 Gulden kostet, und es ist die Frage, wie viel 7 Centner von eben dieser Waare kosten werden, so erhält man die Antwort durch folgende Proportion:

$$1 \text{ ℔} : 700 \text{ ℔} = 11 \text{ fl.} : \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G} = 11 \times 700 = 7700 \text{ fl.}$$

Oder umgekehrt:

Wenn man von einer gewissen Waare 1 Pfund für 11 Gulden bekommt, und es ist die Frage, wie viel Pfunde eben dieser Waare man für 3745 Gulden bekommen würde, so erhält man die Antwort durch folgende Proportion:

$$11 \text{ fl.} : 3745 \text{ fl.} = 1 \text{ ℔} : \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G} = \frac{3745}{11} = 340\frac{5}{11} \text{ ℔}.$$

Da 1 Pf. = 32 Lothe, so werden $\frac{5}{11}$ Pf. durch folgende Proportion in Lothe verwandelt:

$$1 \text{ ℔} : \tfrac{5}{11} \text{ ℔} = 32 \text{ Loth} : \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G} = \frac{5}{11} \times 32 = \frac{5 \times 32}{11} = \frac{160}{11} = 14\frac{6}{11} \text{ Lothe.}$$

Demnach bekommt man für 3745 Gulden 3 Centner 40 Pf. $14\frac{6}{11}$ Lothe der vorigen Waare.

Aufgabe. Wenn ein Buch Papier 8 Kreuzer kostet, was werden 25 Ries kosten?

$$1 \text{ Buch} : 500 \text{ Buch} = 8 \text{ Kr.} : \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G} = 8 \times 500 = 4000 \text{ Kr.} = 66 \text{ fl. } 40 \text{ Kr.}$$

Aufgabe. Von einer gewissen Waare kostet 1 Pf. 1 Gulden 30 Kreuzer, was werden 7 Centner 45 Pf. 15 Lothe eben dieser Waare kosten?

$$32 \text{ Loth} : 23855 \text{ Loth} = 90 \text{ Kr.} : \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G} = \frac{90 \times 23855}{32} = \frac{2146950}{32} = 67092\frac{6}{32} \text{ Kreuzer} =$$
$$1118 \text{ fl. } 12\tfrac{3}{16} \text{ Kreuzer.}$$

Aufgabe. Wenn von einer gewissen Waare 1 Pfund 7 Gulden kostet, wie viel Pfunde von dieser Waare wird man für 3542 Gulden 56 Kreuzer bekommen?

420 Kr : 212576 Kr. = 1 ℔ : G.

$$G = \frac{212576}{420} = 506\ \frac{56}{420}\ ℔ = 506\frac{2}{15}\ ℔.$$

1 ℔ : $\frac{2}{15}$ ℔ = 32 Loth : G

$$G = \frac{2}{15} \times 32 = \frac{2 \times 32}{15} = \frac{64}{15} = 4\frac{4}{15}\ \text{Lothe.}$$

Demnach bekommt man für die genannte Summe 506 Pfunde $4\frac{4}{15}$ Lothe von dieser Waare.

Aufgabe. Wenn 1 Fuder Wein 256 Gulden kostet, wie hoch kommt die Maaß zu stehen?

675 Maaß : 1 Maaß = 256 fl. : G

$G = \frac{256}{675}$ Gulden.

1 fl. : $\frac{256}{675}$ fl. = 60 Kr : G

$$G = \frac{60 \times 256}{675} = \frac{15360}{675} = 22\ \frac{102}{135}\ \text{Kreuzer.}$$

Aufgabe. Wie viel bekommt man für 680 Gulden von einem Weine, davon die Maaß 48 Kreuzer kostet?

48 Kr. : 40800 Kr. = 1 Maaß : G

$$G = \frac{40800}{48} = 850\ \text{Mß.} = 1\ \text{Fdr.}, 1\ \text{Ohm}, 85\ \text{Mß.}$$

Aufgabe. Wenn 1 Achtel Korn 5 Gulden kostet, wie hoch kommt das Mäßchen zu stehen?

64 Mßch. : 1 Mßch. 345 Kr. : G

$$G = \frac{345}{64} = 5\frac{25}{64}\ \text{Kreuzer.}$$

III. Die Zinsrechnung. Bey zinsbarer Verleihung der Kapitalien verhalten sich nämlich die von ungleichen Kapitalien in gleicher Zeit zu bezahlenden Zinsen, wie die Kapitalien, und die von gleichen Kapitalien in ungleicher Zeit zu bezahlenden Zinsen, wie die Zeit. Wenn also 100 Gulden Kapital in einem Jahr 5 Gulden Zinsen tragen, und es ist die Frage, wie viel Zinsen 30000 Gulden Kapitalien in einem Jahre tragen werden, so erhält man die Antwort durch folgende Proportion:

100 fl. K. : 30000 fl. K. = 5 fl. Z. : G

$$G = \frac{5 \times 30000}{100} = \frac{150000}{100} = 1500\ \text{Gulden.}$$

Aufgabe. Wenn 100 Gulden Kapital in einem Jahre 5 Gulden Zinsen tragen, wie viel werden 6800 Gulden Kapitalien in einem Jahre tragen?

100 fl. K. : 6800 fl. K. = 5 fl. Z. : G

$$G = \frac{5 \times 6800}{100} = \frac{34000}{100} = 340 \text{ Gulden.}$$

Aufgabe. Wenn 3000 Gulden Kapitalien in einem Jahre 150 Gulden Zinsen tragen, wie viel werden sie in 25 Jahren tragen?

1 Jahr : 25 Jahr = 150 fl. Z. : G

G = 25 × 150 = 3750 Gulden.

Aufgabe. Wenn 3000 Gulden Kapitalien in einem Jahre 150 Gulden Zinsen tragen, wie lange werden sie stehen müssen, bis die Zinsen dem Kapital gleich werden?

150 fl. Z. : 3000 fl. Z. = 1 Jahr : G

$$G = \frac{3000}{150} = 20 \text{ Jahre.}$$

Aufgabe. Wenn 6500 Gulden Kapitalien in einem Jahre 325 Gulden Zinsen tragen, wie lange werden sie stehen müssen, bis die Summe der Zinsen dem halben Kapital gleich ist?

325 fl. Z. : 3250 fl. Z. = 1 Jahr : G.

$$G = \frac{3250}{325} = 10 \text{ Jahre.}$$

Aufgabe. Wie viel muß man Kapitalien haben um jährlich 600 Gulden Zinsen einzunehmen, wenn man von 100 Gulden Kapitalien jährlich 5 Gulden Zinsen bekommt?

5 fl. Z. : 600 fl. Z. = 100 fl. K. : G.

$$G = \frac{100 \times 600}{5} = 12000 \text{ Gulden Kapitalien.}$$

Aufgabe. Wie viel muß man Kapitalien haben, um jährlich 10000 Reichsthaler Zinsen einzunehmen, wenn man von 100 Reichsthalern Kapitalien jährlich 5 Reichsthaler Zinsen einnimmt?

5 Rthlr. Z. : 10000 Rthlr. Z. = 100 Rthlr. K. : G.

$$G = \frac{100 \times 10000}{5} = \frac{1000000}{5} = 200000 \text{ Rthlr. K.}$$

Aufgabe. Wie lange muß man 40000 Gulden Kapitalien ausstehen haben, um 50000 Gulden Zinsen davon zu erhalten, wenn man in einem Jahre 2000 Gulden Zinsen erhält?

2000 fl. Z. : 50000 fl. Z. = 1 Jahr : G

$$G = \frac{50000}{2000} = 25 \text{ Jahre.}$$

Aufgabe. Wie lange werden 375 Gulden Kapitalien ausstehen müssen, bis die Zinsen dem dreyfachen Kapital gleich werden, wenn sie in einem Jahre $18\frac{3}{4}$ Gulden Zinsen tragen?

$18\frac{3}{4}$ fl. Z. : 1125 fl. Z. = 1 Jahr : G

$\frac{75}{4}$ fl. Z. : 1125 fl. Z. = 1 Jahr : G

$$G = \frac{1125}{\frac{75}{4}} = \frac{1125}{1} : \frac{75}{4} = \frac{1125}{1} \times \frac{4}{75} = \frac{4 \times 1125}{75} = \frac{4500}{75} =$$

60 Jahre.

IV. Die Verrichtungen der Arbeiter, die Zeit, die sie zu einer Arbeit gebrauchen, und ihr Tagelohn. Denn dreymal mehr Arbeiter verrichten dreymal mehr, und in einer dreymal größern Zeit wird auch ihr Werk und ihr Taglohn dreymal größer. Demnach verhalten sich, sowohl die Verrichtungen als die Belohnungen, wie die Arbeiter, oder wie die Zeiten. Eben diese Bewandtniß hat es auch mit dem Zins eines vermietheten Hauses, Guthes oder einer andern Sache. Z. B.

Wenn 25 Arbeiter in 6 Tagen 75 Fuß von einem Graben machen, wie viel Fuß werden sie in 30 Tagen machen?

6 Tage : 30 Tage = 75 Fuß : G

$$G = \frac{75 \times 30}{6} = 75 \times 5 = 375 \text{ Fuß.}$$

Aufgabe. Wenn 6 Arbeiter in einem Tage 25 Fuder Erde abtragen, wie viel werden sie in einer Woche abtragen?

1 Tag : 7 Tage = 25 Fud. : G

$$G = 7 \times 25 = 175 \text{ Fuder Erde.}$$

Aufgabe. Wenn 12 Menschen in einem Tage 150 Ohm Wasser auspumpen, wie viel Menschen wird man haben müssen, um 400 Ohm auszupumpen?

150 Ohm : 400 Ohm = 12 Menschen : G

$$G = \frac{12 \times 400}{150} = \frac{12 \times 8}{3} = 4 \times 8 = 32 \text{ Menschen.}$$

Aufgabe. Wenn 15000 Mann in einem Tage 30000 Pfunde Brod brauchen, wie viel brauchen 150000 Mann?

15000 M : 150000 M. = 30000 ℔ Brod : G

$$G = \frac{30000 \times 150000}{15000} = 300000 \text{ ℔ Brod.}$$

Aufgabe. Wenn die Unterhaltung einer Armee von 25000 Mann in einem Monate 300000 Gulden kostet, wie viel wird sie in 7 Jahren kosten?

1 Mon. : 84 Mon. = 300000 fl. : G

G = 84 × 300000 = 25200000 Gulden.

Aufgabe. Wenn bey einem Buch der gedruckte Bogen mit 9 Gulden bezahlt wird, wie stark muß das Buch seyn, um 300 Gulden einzubringen?

9 fl. : 300 fl. = 1 Bog. : G

$$G = \frac{300}{9} = 33\frac{1}{3} \text{ Bogen.}$$

Aufgabe. Wenn 1 Mann jährlich 25 Reichsthaler Sold bekommt, wie viel beträgt der Sold einer Armee von 200000 Mann?

1 M : 200000 M. = 25 Rthlr. : G

G = 25 × 200000 = 5000000 Rthaler.

Aufgabe. Wenn 1 Schreiber in einem Tage 4 Bogen schreibt, wie viel Schreiber wird man haben müssen, um 3680 Bogen fertig zu bekommen?

4 Bog. : 3680 Bog. = 1 Schreib. : G

$$G = \frac{3680}{4} = 920 \text{ Schreiber.}$$

Aufgabe. Wenn es an einem Orte in einem Tage 20 Ohm Wasser regnet, wie viel würde bey einem 14 Tage anhaltenden Regen Wasser fallen?

1 Tag : 14 Tage = 20 Ohm : G

G = 14 × 20 = 280 Ohm.

Aufgabe. Wenn jemand jährlich 800 Gulden Hausmiethe zu bezahlen hat, wie viel wird er in 10 Jahren und 5 Monaten schuldig?

12 Mon. : 125 Mon. = 800 fl. : G

$G = \frac{800 \times 125}{12} = \frac{100000}{12} = 8333\frac{1}{3}$ fl. = 8333 fl. 20 Kr.

Aufgabe. Wenn ein Gut jährlich 150000 Reichsthaler einträgt, wie viel trägt es in einer Stunde ein?

8760 St. : 1 St. = 150000 Rthlr. : G

$G = \frac{150000}{8760} = 17\frac{108}{876} = 17\frac{9}{73}$ Rthlr. = 17 Rthlr. $13\frac{23}{73}$ Kreuzer.

Aufgabe. Wenn ein Fürst 8000000 Bürger zu Unterthanen hat, deren jeder jährlich 10 Reichsthaler Abgaben giebt, was betragen seine jährlichen Einkünfte?

1 Brg. : 8000000 Brg. = 10 Rthlr. : G

G = 10 × 8000000 = 80000000 Reichsthaler.

§. 63.

Zur verkehrten Regel de Tri gehören unter andern folgende Fälle:

I. Die Berechnung der Arbeiter und der Zeit, die zu einem Werke nöthig sind. Denn einerley Arbeit kann in kürzerer Zeit zu Stande gebracht werden, wenn mehr Menschen daran Theil nehmen; doppelt so viel Arbeiter bringen sie in halb so vieler Zeit zu Stande, und überhaupt ist die Menge der Arbeiter, der Zeit, worin sie einerley Arbeit zu Stande bringen, umgekehrt proportionirt. Wenn z. B. 1500 Soldaten mit einem gewissen Kriegsbau in 9 Monaten fertig werden, und der Bau sollte in 3 Monaten fertig werden, so ist offenbar, daß man dreymal mehr Leute nehmen müßte, weil das Werk im dritten Theile der Zeit fertig werden soll. Wollte man daher die Proportion zur Auflösung dieser Aufgabe so ansetzen,

als wenn zwischen den Arbeitern und der Zeit ein gerades Verhältniß Statt fände, so würde sie folgende seyn:

9 Mon. : 3 Mon. = 1500 Sold. : G

Weil aber die Menge der Arbeiter und die Zeit, die sie zur Arbeit nöthig haben, in einem umgekehrten Verhältnisse stehen, so würde man durch diese Proportion die gesuchte Zahl unrichtig, und zwar um neunmal zu klein finden, weil das erste Glied derselben, das an der Stelle des zweyten stehen sollte, dreymal größer, als das zweyte, und das zweyte das an der Stelle des ersten stehen sollte, dreymal kleiner, als das erste ist. Um demnach die gesuchte Zahl richtig zu erhalten, muß man in der vorigen Proportion die ersten beyden Glieder umkehren, das heißt, das zweyte an die Stelle des ersten, nnd das erste an die Stelle des zweyten setzen, so erhält man:

3 Mon. : 9 Mon. = 1500 Sold. : G

und hieraus $G = \frac{9 \times 1500}{3} = 3 \times 1500 = 4500$ Soldat.

Es ist gut, so lange, bis man in diesen Rechnungen einige Uebung hat, alle Proportionen zuerst unter der Voraussezung eines geraden Verhältnisses zwischen den gegebeneu Größen anzusezen, und erst hernach die Verhältnisse derjenigen Größen umzukehren, bey welchen das Gegentheil jener Voraussezung Statt findet. Z. B.

Aufgabe. Wenn 10 Menschen an 300 Morgen Wiesen 4 Wochen zu mähen hätten, wie viel würde man Menschen haben müssen, um damit in 6 Tagen fertig zu werden?

28 Tg. : 6 Tg. = 10 Mensch. : G

umgekehrt 6 Tg. : 28 Tg. = 10 Mensch. : G

$G = \frac{10 \times 28}{6} = 46\frac{2}{3}$ Menschen.

das heißt, 46 Menschen müssen 6 Tage arbeiten, und noch einer muß $\frac{2}{3}$ von der Arbeit, die jeder von diesen 46 in 6 Tagen thut, verrichten, wenn die Arbeit in 6 Tagen fertig werden soll.

Aufgabe. Wenn 1 Mann an 180 Morgen Feld $\frac{1}{2}$ Jahr zu ackern hätte, und das ganze Feld sollte in

14 Tagen umgeackert werden, wie viel Leute würde man dazu haben müssen?

180 Tg. : 14 Tg. = 1 Mann : G
umgekehrt 14 Tg. : 180 Tg = 1 Mann : G

$$G = \frac{180}{14} = 12\frac{6}{7} \text{ Menschen.}$$

das heißt, 12 Menschen müssen 14 Tage arbeiten, und überdies muß noch einer $\frac{6}{7}$ von der Arbeit, die ein jeder von diesen Zwölfen in 14 Tagen verrichtet, vollbringen, wenn die Arbeit in 14 Tagen fertig werden soll.

II. Die Berechnung der Menschen, und des Aufwands, den ihre Unterhaltung erfordert, oder der Lebensmittel, die sie nöthig haben. Denn eine doppelt so große Anzahl Menschen kostet in halb so vieler Zeit eben so viel zu unterhalten, als die einfache Anzahl in der doppelten Zeit, und doppelt so viel Menschen brauchen in halb so vieler Zeit eben so viel Lebensmittel, als halb so viele Menschen in der doppelten Zeit.

Aufgabe. Wenn eine Armee von 25000 Mann in einem Jahre 500000 Gulden kostet, wie lange wird man eine Armee von 160000 Mann mit eben dieser Summe erhalten können?

25000 M. : 160000 M. = 1 Jahr : G
umgekehrt 160000 M. : 25000 M. = 1 Jahr : G

$$G = \frac{25000}{160000} = \frac{25}{160} = \frac{5}{32} \text{ Jahre.}$$

Nun ist 1 Jahr : $\frac{5}{32}$ = 365 Tage : G

$$G = \frac{5}{32} \times 365 = \frac{365 \times 5}{32} = 57\frac{1}{32} \text{ Tage.}$$

Aufgabe. In einer Festung, die belagert werden soll, liegen 850 Mann in Garnison, sie haben noch auf 5 Monate Proviant, und es ist die Frage, wie viel von ihnen abziehen müssen, damit die übrigen eine Belagerung von 35 Monaten aushalten können?

Diese Frage ist, wenn man sie von den ausserwesentlichen Bestimmungen entkleidet, eigentlich folgende: wenn 850 Menschen mit einem gewissen Vorrathe von Lebensmitteln 5 Monate lang erhalten werden können,

wie viel Menschen können mit eben diesem Vorrathe 35 Monate lang erhalten werden?

5 Mon. : 35 Mon. = 850 Msch. : G
umgekehrt 35 Mon. : 5 Mon. = 850 Msch. : G

$$G = \frac{5 \times 850}{35} = \frac{859}{7} = 121\frac{3}{7} \text{ Menschen.}$$

das heißt 121 Mann können von diesem Vorrathe 35 Monate lang erhalten werden, nnd es bleiben noch $\frac{3}{7}$ von dem übrig, was 1 Mann in 35 Monaten verzehrt. Wenn also die Belagerung 35 Monate dauern soll, so müssen 729 Mann abziehen.

Aufgabe. Auf einem Schiffe befinden sich 1556 Menschen, ihr Brodvorrath reicht, wenn jeder täglich 4 Pfund verzehrt, noch auf $1\frac{1}{2}$ Monate hin, das Schiff wird aber auf eine unbewohnte Insel verschlagen, und kann nicht hoffen, vor 3 Monaten frische Lebensmitel zu bekommen, es ist die Frage, wie viel Brod jeder täglich verzehren dürfe, wenn der noch übrige Vorrath auf 3 Monate zureichen solle?

$1\frac{1}{2}$ Mon. : 3 Mon. = 4 ℔ : G
umgekehrt 3 Mon. : $1\frac{1}{2}$ Mon. = 4 ℔ : G
3 Mon. : $\frac{3}{2}$ Mon. = 4 ℔ : G

$$G = \frac{4 \times \frac{3}{2}}{3} = \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{3} = \frac{4 \times 3}{2 \times 3} = \frac{4}{2} = 2 \text{ Pfund.}$$

III. Die Berechnung, in wie viel Zeit ein gegebenes Kapital eben so viel Interessen bringt, als ein anderes in einer gegebenen Zeit; oder, wie groß ein Kapital seyn muß, wenn es in einer gegebenen Zeit eben so viel Interessen bringen soll, als ein anderes in einer andern Zeit. Denn da ein doppeltes Kapital in halb so vieler Zeit eben so viel Zins trägt, als das einfache in der doppelten Zeit, so sind bey gleichen Zinsen die Zeiten den Kapitalien umgekehrt proportionirt.

Aufgabe. Wie lange müssen 360 Reichsthaler ausstehen, wenn sie bey gleichen Procenten eben so viel Interessen bringen sollen, als 1500 Reichsthaler in einem Jahre?

1500 Rthlr. : 360 Rthlr. = 1 Jahr : G
umgekehrt 360 Rthlr. : 1500 Rthlr. = 1 Jahr : G

$$G = \frac{15000}{360} = \frac{150}{36} = 4\frac{1}{6} \text{ Jahr} = 4 \text{ Jahre } 2 \text{ Mon.}$$

Aufgabe. Ein Hamburger Kaufmann hat einem Frankfurter Kaufmann 5745 Reichsthaler auf 18 Monate ohne Zins geliehen, und nun leihet der Frankfurter Kaufmann dem Hamburger 1490 Reichsthaler mit der Bedingung, sie so lange zu behalten, bis der Dienst auf beyden Seiten gleich werde; es ist die Frage, wie lange der Hamburger Kaufmann diese 1490 Reichsthaler behalten dürfe? Er darf sie so lange behalten, bis sich die Zinsen davon eben so hoch belaufen, als die Zinsen von 5754 Reichsthalern in 18 Monaten. Demnach findet man die Auflösung durch folgende Proportion:

5745 Rthlr. : 1490 Rthlr. = 18 Mon. : G
umgekehrt 1490 Rthlr. : 5745 Rthlr. = 18 Mon. : G

$$G = \frac{18 \times 5745}{1490} = 69\ \frac{60}{149} \text{ Monate.}$$

Aufgabe. Wie groß muß das Kapital seyn, das in $1\frac{1}{2}$ Jahren eben so viel Interessen bringt, als 6870 Reichsthaler in 4 Monaten?

4 Mon. : 18 Mon. = 6870 Rthlr. : G
umgekehrt 18 Mon. : 4 Mon. = 6870 Rthlr. : G

$$G = \frac{4 \times 6870}{18} = 1526\frac{2}{3} \text{ Reichsthaler.}$$

IV. Die Berechnung der Länge der Zeuge von verschiedener Breite. Denn je breiter ein Stück Zeug ist, das zu einerley Absicht gebraucht werden soll, desto kleiner darf seine Länge seyn; wenn es doppelt so breit ist, wie ein anderes, so braucht es nur halb so lang zu seyn, als jenes, demnach ist die Breite der Länge umgekehrt proportionirt.

Aufgabe. Man braucht zu einem Kleide 10 Ellen Zeug, das $\frac{5}{4}$ breit ist, wie viel Futterzeug muß man dazu haben, wenn dieses 2 Ellen breit ist?

$\frac{5}{4}$ Ell. Breite : 2 Ell. Breite = 10 Ell. Länge : G
umgekehrt 2 Ell. Breite : $\frac{5}{4}$ Ell. Breite = 10 Ell. Länge : G

$$G = \frac{\frac{5}{4} \times 10}{2} = \frac{5 \times 10}{4} = \frac{5 \times 10}{2 \times 4} = \frac{5 \times 5}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4} \text{ Ell.}$$

Aufgabe. Wenn man zu einem Kleide 6 Ellen Zeug, das $\frac{7}{4}$ Ellen breit ist, nöthig hat, wie viel Unterzeug braucht man dazu, wenn dieses $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist?

$\frac{7}{4}$ Ell. Breite : $\frac{5}{4}$ Ell. Breite = 6 Ell. Länge : G
umgekehrt $\frac{5}{4}$ Ell. Breite : $\frac{7}{4}$ Ell. Breite = 6 Ell. Länge : G

$$G = \frac{6 \times \frac{7}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{6 \times 7}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{42}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{42}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{42 \times 4}{4 \times 5} = \frac{42}{5} =$$

$8\frac{2}{5}$ Ellen.

Aufgabe. Wenn man zur Tapezirung eines Zimmers 68 Ellen Tapeten, die $\frac{9}{4}$ Ellen breit sind, gebraucht, wie viel müßte man dazu von einem Stücke haben, das nur $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist?

$\frac{9}{4}$ Ell. Breite : $\frac{5}{4}$ Ell. Breite = 68 Ell. Länge : G
umgekehrt $\frac{5}{4}$ Ell. Breite : $\frac{9}{4}$ Ell. Breite = 68 Ell. Länge : G

$$G = \frac{68 \times \frac{9}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{68 \times 9}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{612}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{612}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{612}{5} = 122\frac{2}{5} \text{ Ell.}$$

Aufgabe. Um einen Wagen auszuschlagen braucht man 22 Ellen Sammt, der 1 Elle breit ist, wie viel Tuch hätte man dazu nöthig von $\frac{7}{4}$ Ellen Breite?

1 Ell. Breite : $\frac{7}{4}$ Ell. Breite = 22 Ell. Länge : G
umgekehrt $\frac{7}{4}$ Ell. Breite : 1 Ell. Breite = 22 Ell. Länge : G

$$G = \frac{22}{\frac{7}{4}} = \frac{22}{1} \times \frac{4}{7} = \frac{22 \times 4}{7} = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7} \text{ Ell.}$$

Es ist übrigens zu bemerken, daß in diesen und ähnlichen Fällen die Proportionen niemals in völliger Schärfe zu nehmen sind. Denn wenn es gleich seine Richtigkeit hat, daß ein Paar viereckige Stücke Zeug gleich groß sind, wenn ihre Längen den Breiten umgekehrt proportionirt sind, so lassen sich doch die verschnittenen Stücke nicht allemal eben so genau wieder zusammensezen, daß nicht zuweilen etwas mehr oder weniger darauf gehen sollte, als die Rechnung giebt. Eben so wurde bey den obigen Aufgaben von Arbeitern, Zeit und Arbeit voraus gesezt, daß von mehreren Arbeitern in gleicher Zeit jeder gleich viel zu Stande bringe, und daß auch jeder Arbeiter für sich in glei-

chen Theilen der Zeit gleich viel ausrichte. Aber diese beyden Bedingungen werden niemals in völliger Strenge erfüllt.

§. 64.

Alle unsere bisherigen Aufgaben gehörten zu der einfachen Regel de Tri, weil, da bey denselben die gegebene Größe zu den gesuchten in einem einfachen Verhältnisse stand, das einem andern gegebenen gleich war, die Auflösung jedesmal durch eine einzige Proportion gefunden wurde. Es giebt aber viele Fälle, wo das Verhältniß einer gegebenen Größe zu der gesuchten nicht ein einfaches, sondern aus zwey oder mehreren Verhältnissen, die eben so vielen andern gleich sind, zusammengesezt ist, zu deren Auflösung man daher auch, weil die vorgelegte Aufgabe mehr als eine Frage enthält, mehr als eine Proportion gebrauchen, oder die Regel de Tri zu wiederholten Malen anwenden muß. Alle diese Fälle werden daher zur zusammengesezten Regel de Tri gerechnet, und zwar wird diese, wenn das Verhältniß der gegebenen Größe zu der gesuchten nur aus zwey Verhältnissen zusammengesezt ist, die Regel Quinque, ist aber dieses Verhältniß aus mehr, als zwey, Verhältnissen, so viel ihrer seyn mögen, zusammengesezt, die Kettenregel genannt. Zur Regel Quinque gehören daher alle die Fälle, wo zu fünf gegebenen Zahlen die sechste, zur Kettenregel hingegen diejenigen, wo zu mehr als fünf Zahlen eine andere gesucht wird. Hieraus erhellet von selbst, daß diese beyden Regeln das nämliche Verfahren fordern, da durch die größere oder geringere Anzahl der Proportionen, die man bey der einen oder bey der andern gebraucht, in dem Verfahren selbst nichts geändert werden kann. Alles kommt dabey lediglich auf Zusammensezung von Verhältnissen an, wodurch man ein Verhältniß zweyer Größen das nicht unmittelbar gegeben ist, vermittelst gegebener Zwischenverhältnisse findet. Die allgemeine Vorschrift für die Regel Quinque und Kettenregel, oder für alle zur zusammengesezten Regel de Tri gehörigen Fälle, ist demnach folgende:

Man zerlege zuerst die zusammengesezte Aufgabe in die darin enthaltenen einzelnen Fragen, und seze hierauf, ganz wie bey der einfachen Regel de Tri, nur für eine Frage eine Proportion an, ohne auf die übrigen Rücksicht zu nehmen, anstatt aber das vierte Glied dieser Proportion auf die gewöhnliche Weise durch die ersten drey zu bestimmen, und es alsdann bey der für die zweyte Frage auzusezenden Proportion zu gebrauchen, gehe man sogleich zu dieser zweyten Frage fort, und seze für diese, eben so wie für die erste, eine Proportion an; in dieser wird nun das lezte, noch unbekannte, Glied der ersten Proportion die Stelle des vorlezten oder dritten Glieds einnehmen. Auch hier bestimme man das vierte Glied nicht durch die ersten drey, sondern gehe nun statt dessen zur dritten Frage fort, und seze auch für diese eine Proportion an, so wird in dieser wiederum das lezte Glied der vorhergehenden zweyten Proportion die Stelle des vorlezten oder dritten Glieds einnehmen. Nun gehe man zur folgenden Frage fort, und seze auch für diese, wie für alle noch weiter nachfolgenden, eine Proportion an. Wenn man nun damit zu Ende ist, so multiplicire man die unter einander stehenden gleichnamigen Glieder aller dieser Proportionen in einander. In der solchergestalt entstehenden Proportion wird nun das dritte und vierte Glied eben so viele gemeinschaftliche Factoren, weniger einen, haben, als die Anzahl aller Proportionen beträgt, die in einander multiplicirt worden sind; alle diese gemeinschaftlichen Factoren werfe man nun (nach §. 59.) aus dem dritten und vierten Gliede heraus, und bestimme alsdann in der übrig bleibenden Proportion das vierte Glied auf die gewöhnliche Weise. Sollten in den ersten beyden Gliedern auch noch etliche gemeinschaftliche Factoren vorhanden seyn, so wird die Rechnung dadurch abgekürzt, wenn man vorher mit denselben diese Glieder dividirt, welches (nach §. 50. Nro. VII.) erlaubt ist. Weil hier solchergestalt der unbekannten Glieder mehrere werden, so kann man alle nachfolgenden durch rechter Hand oben beygesezte Striche von dem ersten unterscheiden, z. B. nachdem man das erste, wie gewöhnlich, mit G bezeichnet hat, so bezeichne man das zweyte mit G′, das dritte mit G″ u. s. w. In der lezten Proportion aber, wo nur noch

ein unbekanntes Glied übrig bleibt, fällt alsdann, wie sich von selbst versteht, dies Unterscheidungszeichen wieder weg.

Aufgabe. Wenn man für 8 Centner 12 Meilen weit zu fahren 4 Reichsthaler bezahlen muß, wie viel muß man geben 36 Centner 18 Meilen weit zu fahren?

Hier ist das Verhältniß der gegebenen Fracht von 4 Reichsthalern zu der gesuchten aus den beyden Verhältnissen der 8 Centner zu den 36 Centnern, und der 12 Meilen zu den 18 Meilen zusammengesezt, und die Aufgabe gehört also zur zusammengesezten Regel de Tri, und zwar zur Regel Quinque, weil aus fünf gegebenen Zahlen die sechste gesucht wird. Nach der gegebenen Vorschrift hat man daher also zu verfahren.

Die einzelnen Fragen in welche diese Aufgabe sich zerlegen lässet, sind folgende:

1) Wenn 8 Centner einen gewissen Weg zu fahren 4 Reichsthaler kosten, was werden 36 Centner eben diesen Weg zu fahren kosten?

2) Wenn 36 Centner einen Weg von 12 Meilen zu fahren, so viel kosten, als man durch Beantwortung der vorigen Frage findet, was wird eben diese Last einen Weg von 18 Meilen zu fahren kosten?

Da man nun weiß, daß die Frachten bey gleichen Wegen sich verhalten, wie die Lasten, und bey gleichen Lasten wie die Wege, so gelangt man zu Beantwortung der beyden vorstehenden Fragen, also der ganzen Aufgabe, durch Zusammensezung zweyer Proportionen, welche man erhalt, indem man zuerst, unter Voraussezung gleicher Wege, schließt:

Wie sich 8 Centner verhalten zu 36 Centner so verhalten sich 4 Rthlr. (als die Fracht der 8 Centner auf einen gewissen Weg) zur gesuchten Zahl (der Fracht der 36 Centner auf eben diesen Weg).

Dann aber unter Voraussezung gleicher Lasten:

Wie sich 12 Meilen verhalten zu 18 Meilen, so verhält sich die vorhin gesuchte Zahl (nämlich die Fracht

der 36 Centner auf den Weg von 12 Meilen) zu der hier gesuchten (der Fracht eben dieser Last auf den Weg von 18 Meilen).

Das erste, vermittelst der gewöhnlichen Zeichen ausgedrückt, giebt die Proportion

Centner Centner Rthlr. Rthlr.
8 : 36 = 4 : G

Ohne nun die gesuchte Zahl G dieser Proportion durch die ersten drey Glieder derselben zu bestimmen, verbindet man sogleich die zweyte damit, welche diese Gestalt hat

Meilen Meilen Rthlr. Rthlr.
12 : 18 = G : G'

Werden nun diese Proportionen gehörig untereinander gesezt, und alsdann die gleichnamigen Glieder in einander multiplicirt, so ist die Rechnung (nach §. 59) diese:

Centner Centner Rthlr. Rthlr.
8 : 36 = 4 : G
Meilen Meilen Rthlr. Rthlr.
12 : 18 = G : G'

$8 \times 12 : 36 \times 18 = 4 : G$

Nun hat das erste und zweyte Glied zum gemeinschaftlichen Factor 12, dividirt man also mit diesem, so ist:

$8 \times 1 : 3 \times 18 = 4 : G$

dividirt man hier wiederum das erste und zweyte Glied mit 2, so ist:

$4 : 3 \times 9 = 4 : G$

dividirt man noch das erste und dritte Glied mit 4, so ist:

$1 : 3 \times 9 = 1 : G$

und hieraus findet sich dann

$G = 3 \times 9 = 27$ Reichthalern.

Eben dieses würde man zwar auch gefunden haben, wenn man zuerst aus der ersten Proportion das vierte Glied G gesucht, und den dafür gefundenen

Werth zum dritten Gliede der zweyten Proportion gemacht hätte. Allein es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Art doppelte Arbeit hätte. Es wäre nämlich alsdaun die Rechnung folgende:

$$8 \text{ Ct.} : 36 \text{ Ct.} = 4 \text{ Rthlr.} : \text{G}$$

$$\text{Und hieraus } \text{G} = \frac{4 \times 36}{8} = 18$$

Dieses in der zweyten Proportion gesezt giebt:

$$12 \text{ Mt.} : 18 \text{ Mt.} = 18 \text{ Rthlr.} : \text{G}$$

$$\text{G} = \frac{18 \times 18}{12} = \frac{3 \times 18}{2} = \frac{3 \times 9}{1} = 27 \text{ Rthlr.}$$

Aufgabe. Wenn 100 Reichsthaler Kapital in einem Jahre 5 Reichsthaler Interessen tragen, wie viel tragen 3650 Reichsthaler in 5 Jahren und 6 Monaten?

Kap.	Kap.	Int.
100 Rthlr. :	3650 Rthlr. =	5 Rthlr. : G
12 Mon. :	66 Mon. =	G : G'

$$12 \times 100 : 66 \times 3650 = 5 : \text{G}$$

$$\text{G} = \frac{5 \times 66 \times 3650}{12 \times 100} = \frac{1204500}{1200} \; 1003\frac{3}{4} \text{ Reichsthlr.}$$

Aufgabe. Zu einem gewissen Werke sind 20 Arbeiter auf 15 Wochen, täglich 6 Stunden zu arbeiten, für 1000 Gulden gedungen worden, wie viel wird man nach diesem Verhältnisse 36 Arbeitern auf 4 Wochen, täglich 8 Stunden zu arbeiten, bezahlen müssen?

Hier ist der Arbeitslohn von drey Bestimmungsstücken abhängig, nämlich von den Zahlen der Arbeiter, von den Wochen der Arbeit und den täglichen Arbeitsstunden. Da jedes dieser Bestimmungsstücke sowohl für den gegebenen, als für den gesuchten Arbeitslohn angegeben ist, so hat man hier zu sieben gegebenen Zahlen die achte zu finden, und die Aufgabe gehört demnach zur so genannten Kettenregel. Um sie aufzulösen, muß das Verhältniß des gegebenen Arbeitslohns von 1000 fl. zu dem gesuchten aus den drey gegebenen Verhältnissen der Zahlen der Arbeiter, der Wochen der Arbeit und der täglichen Arbeitsstunden gehörig zusammengesezt werden. Da nun die Belohnungen der Abeiter, bey gleichen Wochen und Stunden der Arbeit sich verhalten wie die Zahlen der Arbeiter,

bey gleichen Zahlen der Arbeiter und der täglichen Arbeitsstunden aber, wie die Wochen der Arbeit und endlich bey gleichen Zahlen der Arbeiter und gleichen Wochen der Arbeit, wie die täglichen Arbeitsstunden, so schließt man zuerst, unter Voraussezung gleicher Wochen und Stunden der Arbeit, für die Zahlen der Arbeiter:

Wie sich 20 Arbeiter verhalten zu 36 Arbeitern, so verhalten sich 1000 fl. (als der Lohn der 20 Arbeiter für eine gewisse Arbeit in einer gewissen Zeit) zu der gesuchten Zahl (dem Lohne der 36 Arbeiter für eben diese Arbeit in eben dieser Zeit).

Hierauf schließt man, unter Voraussezung gleicher Zahlen der Arbeiter und der Arbeitsstunden, für die Wochen der Arbeit, als das zweyte Bestimmungsstück, also:

Wie sich 15 Wochen verhalten zu 4 Wochen, so verhält sich der, durch die erste Proportion bestimmte, Lohn der 36 Arbeiter in 15 Wochen zu der gesuchten Zahl (dem Lohne eben dieser 36 Arbeiter in 4 Wochen).

Endlich schließt man, unter Voraussezung gleicher Zahlen der Arbeiter uud gleicher Wochen der Arbeit, für die Arbeitsstunden, als das dritte Bestimmungsstück, also:

Wie sich 6 Stunden verhalten zu 8 Stunden, so verhält sich der, durch die zweyte Proportion bestimmte, Lohn der 36 Arbeiter in 4 Wochen bey 6 täglichen Arbeitsstunden zu der gesuchten Zahl (dem Lohne der 36 Arbeiter in 4 Wochen bey 8 täglichen Arbeitsstunden).

Dies giebt (nach §. 59.) folgende Rechnung:

20 Arb. : 36 Arb. = 1000 fl. : G
15 Wch. : 4 Wch. = G : G'
6 St. : 8 St. = G' : G''

$$20 \times 15 \times 6 : 36 \times 4 \times 8 = 1000 : G$$

$$G = \frac{1000 \times 8 \times 4 \times 36}{20 \times 15 \times 6} = \frac{1152000}{1800} = \frac{11520}{18} =$$

640 Gulden.

Aufgabe. Wie viel Mariengroschen hat 1 Dukaten, wenn 4 Dukaten = 11 Thaler, 2 Thaler = 3 Gulden, 1 Gulden = 16 g. Groschen, 2 g. Groschen = 3 Mariengroschen sind?

Um die zur Auflösung dieser Aufgabe nöthigen Proportionen gehörig anzusezen, bedenke man folgendes:

Der Ausdruck 4 Dukaten ist völlig einerley mit dem Ausdrucke 4 × 1 Dukaten, der Ausdruck 11 Thaler mit dem Ausdrucke 11 × 1 Thaler, und eben so verhält es sich auch mit den übrigen Ausdrücken, die in der Aufgabe vorkommen. Demnach können die gegebenen Stücke der Aufgabe auch folgendermaßen geschrieben werden:

4 × 1 Duk.	=	11 × 1	Thlr.
2 × 1 Thlr.	=	3 × 1	Gulden.
1 × 1 Gulden	=	16 × 1	g. Groschen.
2 × 1 g. Groschen	=	3 × 1	Mar. Groschen.

Dies sind nun vier Paare einander stückweise gleicher Producte, deren jedes zwey Factoren hat. So hat z. B. das erste Product des zweyten Paars zu Factoren, 2, und 1 Thlr., das zweyte Product eben dieses Paars hat zu Factoren 3, und 1 Gulden. Es kann also, bey jedem Paare dieser Producte, das eine Product als das Product der äußeren, und das andere als das Product der mittleren Glieder angesehen werden. Da nun (nach §. 49.) allemal, wenn diese beyden Producte einander gleich sind, die vier Glieder in einer geometrischen Proportion stehen, so folgt, daß jedes Paar dieser gleichen Producte eine geometrische Proportion geben müsse.

Macht man nun (nach §. 49.) diese Proportionen, so werden sie nach der Ordnung der obigen Producte, folgende seyn:

4 : 11	=	1 Thlr.	: 1 Duk.
2 : 3	=	1 Gulden	: 1 Thlr.
1 : 16	=	1 g. Groschen	: 1 Gulden
2 : 3	=	1 Mar. Groschen	: 1 g. Groschen.

Hieraus sieht man nun, daß das Verhältniß des Mariengroschen zum Dukaten aus den Verhältnissen

des Mariengroschen zum guten Groschen, des guten Groschen zum Gulden, des Gulden zum Thaler, und des Thalers zum Dukaten zusammengesezt ist. Nur stehen diese Verhältnisse noch nicht in der gehörigen Ordnung. Denn die Verhältnisse rechter Hand des Gleichheitszeichens sind so beschaffen, daß immer das Vorderglied des einen das Hinterglied des nächstfolgenden ist; nach §. 57. hingegen sollte immer das Hinterglied des einen das Vorderglied des nächstfolgenden seyn. Man muß sie also noch in diese Ordnung bringen, welches geschiehet, wenn man die lezte Proportion zur ersten macht, von dieser zur zweyten von unten, und so weiter zu den übrigen fortgeht, wonach sie also folgende Stellung erhalten:

2 : 3 = 1 Mgr. : 1 g. Gr.
1 : 16 = 1 g. Gr. : 1 fl.
2 : 3 = 1 fl. : 1 Thlr.
4 : 11 = 1 Thlr. : 1 Dukt.

$2 \times 1 \times 2 \times 4 : 3 \times 16 \times 3 \times 11 = 1$ Mrgr. : 1 Duk.
$16 : 16 \times 99 = 1$ Mgr. : 1 Duk.

dividirt man hier das erste und zweyte Glied mit 16, so ist

1 : 99 = 1 Mgr. : 1 Duk.,

macht man nun das Product der äußeren und mittleren Glieder, so ist

1 Duk. = 99 Mgr.

Es ist leicht einzusehen, daß man diese Proportionen gleich in der richtigen Ordnung erhalten hätte, wenn man bey Zusammensezung der Producte, woraus sie hernach abgeleitet wurden, mit den Mariengroschen, als der kleinsten unter den gegebenen Größen angefangen hätte, und von diesen zu den übrigen größeren aufgestiegen wäre.

Daß aber hier der Mariengroschen mit dem guten Groschen, der gute Groschen mit dem Gulden, der Gulden mit dem Thaler und der Thaler mit dem Dukaten in den Verhältnissen zusammengestellt wird, dies könnte vielleicht Jemanden anstößig und dem, was oben §. 62 festgesezt worden ist, daß durchaus nur gleichartige Größen ein Verhältniß zu einander haben kön-

nen, folglich die Glieder des nämlichen Verhältnisses immer einerley Namen haben, oder doch auf einerley Namen müssen gebracht werden können, widersprechend scheinen. Allein wenn gleich diese Größen verschiedene Namen führen, so können sie doch vermittelst der gegebenen Reductionssäze, leicht auf einerley Namen gebracht werden, und es findet also das zweyte der oben angegebenen Merkmale der Gleichartigkeit wirklich bey ihnen Statt. Denn aus dem Reductionssaze

3 Mgr. = 2 g. Gr. folgt
1 Mgr. = $\frac{2}{3}$ g. Gr.

Und ebenso verhält es sich mit allen übrigen.

Aufgabe. Wenn 9 Louisd'or = 16 Dukaten, 1 Dukaten = 9 Mark, und 3 Mark = 1 Thaler sind, so frägt sich, wie viel Thaler einen Louisd'or ausmachen, und wie viel Louisd'or 10000 Thaler betragen?

16 : 9 = Lsd'or : Duk.
9 : 1 = Duk. : Mk.
1 : 3 = Mk. : Thlr.

16 × 9 × 1 : 9 × 1 × 3 = Lsd. : Thlr.
16 : 3 = Lsd. : Thlr.
folglich 16 Thlr. = 3 Lsd.
und mithin 16 Thlr. : 10000 Thlr. = 3 Lsd. : G
demnach $G = \frac{3 \times 10000}{16} = 1875$ Louisd'or.

Aufgabe. Wie viel Thaler Hannöverisch Kassengeld sind 125 Thaler rheinisch, wenn 2 Thlr. rhein. = 3 fl. rhein.; 9 fl. rhein. = 1 Louisd'or; 1 Lsd'or = 7 fl. Kassengeld, und 3 fl. Kassengeld = 2 Thlr. Kassengeld.

Aus diesen Bestimmungen ergiebt sich folgende Rechnung:

3 : 2 = 1 Thlr. rhein. : 1 fl. rhein.
1 : 9 = 1 fl. rhein. : 1 Lsd'or.
7 : 1 = 1 Louisd'or : 1 fl. K. G.
2 : 3 = 1 fl. K. G. : 1 Thlr. K. G.

3 × 7 × 2 : 2 × 9 × 3 = 1 Thlr. rhein. : 1 Thlr. K. G.
7 : 9 = 1 Thlr. rhein. : 1 Thlr. K. G.

Demnach 9 Thlr. rhein. = 7 Thlr. K. G. und mithin

9 Thlr. rhein. : 125 Thlr. rhein. = 7 Thlr. K. G. : G

$$G = \frac{125 \times 7}{9} = \frac{875}{9} = 97\frac{2}{9} \text{ Thlr. Kassengeld.}$$

Aufgabe. Wie viel Waizenkörner gehen auf 1 englischen Scheffel, wenn auf 1 Scheffel 64 Pfunde, auf 1 Pfund 12 Unzen, auf 1 Unze 20 Sterlinge, auf 1 Sterling 32 Körner gehen, oder wenn 1 Scheffel = 64 ℔, 1 ℔ = 12 Unzen, 1 Unze = 20 Sterlinge, 1 Sterling = 32 Körner?

Aus diesen gegebenen Stücken fließen folgende Proportionen:

1	: 32	= 1 Korn	: 1 Sterl.
1	: 20	= 1 Sterl.	: 1 Unze.
1	: 12	= 1 Unze	: 1 ℔
1	: 64	= 1 ℔	: 1 Scheffel.

folglich 1 : 32 × 20 × 12 × 64 = 1 Korn : 1 Scheffel,

und mithin 1 Scheffel = 32 × 20 × 12 × 64 = 491520 Körner.

Aufgabe. Wie viel englische Scheffel gehen auf 1 englische Cubikmeile, wenn 1 Cubikmeile = 147197952000 Cubikfuß; 1 Cubikfuß = 1728 Cubikzolle, und 1848 Cubikzolle = 1 Scheffel?

Hieraus ergeben sich nachstehende Proportionen:

1848	: 1	= 1 Scheffel	: 1 Cub. Zoll
1	: 1728	= 1 Cub. Zoll	: 1 Cub. Fuß
1	: 147917952000	= 1 Cub. Fuß	: 1 Cub. Mle.

folglich

1848 : 1728 × 147197952000 = 1 Scheffel : 1 Cubikmeile.

Dividirt man hier die ersten beyden Glieder mit 24, so erhält man

77 : 72 × 147197952000 = 1 Scheffel : 1 Cubikmeile.

nen, folglich die Glieder des nämlichen Verhältnisses immer einerley Namen haben, oder doch auf einerley Namen müssen gebracht werden können, widersprechend scheinen. Allein wenn gleich diese Größen verschiedene Namen führen, so können sie doch vermittelst der gegebenen Reductionssäze, leicht auf einerley Namen gebracht werden, und es findet also das zweyte der oben angegebenen Merkmale der Gleichartigkeit wirklich bey ihnen Statt. Denn aus dem Reductionssaze

3 Mgr. = 2 g. Gr. folgt
1 Mgr. = $\frac{2}{3}$ g. Gr.

Und ebenso verhält es sich mit allen übrigen.

Aufgabe. Wenn 9 Louisd'or = 16 Dukaten, 1 Dukaten = 9 Mark, und 3 Mark = 1 Thaler sind, so frägt sich, wie viel Thaler einen Louisd'or ausmachen, und wie viel Louisd'or 10000 Thaler betragen?

16 : 9 = Lsd'or : Duk.
9 : 1 = Duk. : Mk.
1 : 3 = Mk. : Thlr.

16 × 9 × 1 : 9 × 1 × 3 = Lsd. : Thlr.
16 : 3 = Lsd. : Thlr.
folglich 16 Thlr. = 3 Lsd.
und mithin 16 Thlr. : 10000 Thlr. = 3 Lsd. : G
demnach $G = \frac{3 \times 10000}{16} = 1875$ Louisd'or.

Aufgabe. Wie viel Thaler Hannöverisch Kassengeld sind 125 Thaler rheinisch, wenn 2 Thlr. rhein. = 3 fl. rhein.; 9 fl. rhein. = 1 Louisd'or; 1 Lsd'or = 7 fl. Kassengeld, und 3 fl. Kassengeld = 2 Thlr. Kassengeld.

Aus diesen Bestimmungen ergiebt sich folgende Rechnung:

3 : 2 = 1 Thlr. rhein. : 1 fl. rhein.
1 : 9 = 1 fl. rhein. : 1 Lsd'or.
7 : 1 = 1 Louisd'or : 1 fl. K. G.
2 : 3 = 1 fl. K. G. : 1 Thlr. K. G.

3 × 7 × 2 : 2 × 9 × 3 = 1 Thlr. rhein. : 1 Thlr. K. G.
7 : 9 = 1 Thlr. rhein. : 1 Thlr. K. G.

Demnach 9 Thlr. rhein. = 7 Thlr. K. G. und mithin

9 Thlr. rhein. : 125 Thlr. rhein. = 7 Thlr. K. G. : G

$$G = \frac{125 \times 7}{9} = \frac{875}{9} = 97\frac{2}{9} \text{ Thlr. Kassengeld.}$$

Aufgabe. Wie viel Waizenkörner gehen auf 1 englischen Scheffel, wenn auf 1 Scheffel 64 Pfunde, auf 1 Pfund 12 Unzen, auf 1 Unze 20 Sterlinge, auf 1 Sterling 32 Körner gehen, oder wenn 1 Scheffel = 64 ℔, 1 ℔ = 12 Unzen, 1 Unze = 20 Sterlinge, 1 Sterling = 32 Körner?

Aus diesen gegebenen Stücken fließen folgende Proportionen:

1 : 32 = 1 Korn : 1 Sterl.
1 : 20 = 1 Sterl. : 1 Unze.
1 : 12 = 1 Unze : 1 ℔
1 : 64 = 1 ℔ : 1 Scheffel.

folglich 1 : 32 × 20 × 12 × 64 = 1 Korn : 1 Scheffel,

und mithin 1 Scheffel = 32 × 20 × 12 × 64 = 491520 Körner.

Aufgabe. Wie viel englische Scheffel gehen auf 1 englische Cubikmeile, wenn 1 Cubikmeile = 147197952000 Cubikfuß; 1 Cubikfuß = 1728 Cubikzolle, und 1848 Cubikzolle = 1 Scheffel?

Hieraus ergeben sich nachstehende Proportionen:

1848 : 1 = 1 Scheffel : 1 Cub. Zoll
1 : 1728 = 1 Cub. Zoll : 1 Cub. Fuß
1 : 147917952000 = 1 Cub. Fuß : 1 Cub. Mle.

folglich

1848 : 1728 × 147197952000 = 1 Scheffel : 1 Cubikmeile.

Dividirt man hier die ersten beyden Glieder mit 24, so erhält man

77 : 72 × 147197952000 = 1 Scheffel : 1 Cubikmeile.

Macht man nun das Product der äußeren und mittleren Glieder, so findet man

77 Cub. Meilen = 72 × 147197952000 Scheffel, folglich, wenn man beyderseits mit 77 dividirt,

1 Cubik-Meile = $\frac{72 \times 147197952000}{77}$ =

$\frac{10598252544000}{77}$ = 137639643428 Scheffel und $\frac{44}{77}$ eines Scheffels.

§. 65.

Das Verhältniß der Zahl die mit der gesuchten von einerley Art ist, zu der gesuchten ist öfters nicht aus geraden, sondern auch aus umgekehrten Verhältnissen der gegebenen Zahlen zusammengesezt, welches jedesmal aus der Natur der durch die gegebenen Zahlen ausgedrückten Größen eben so, wie bey der einfachen Regel de Tri, beurtheilt werden muß. Solche Aufgaben, wobey dieses Statt findet, gehören alsdann zur umgekehrt zusammengesezten Regel de Tri. Wenn man dabey die zusammengesezte Rechnungsfrage in die darin liegenden einfachen Fragen nach der (im vorigen §.) gegebenen Vorschrift zerlegt, und für jede eine besondere Proportion ansezt, so ist allemal leicht einzusehen, in welchem Verhältnisse man die Glieder umgekehrt sezen müsse.

Aufgabe. Wenn 125 Soldaten mit 16500 Gulden 1 Jahr lang erhalten werden können, wie lange können 2150 Soldaten mit 709500 Gulden erhalten werden?

Hier ist das Verhältniß derjenigen Zahl, die mit der gesuchten von einerley Art ist, nämlich das Verhältniß von 1 Jahr zu der gesuchten Zeit, in welcher 2150 Soldaten mit 709500 Gulden erhalten werden können, aus den Verhältnissen der Zahlen der Soldaten und der Zahlen der Gulden zusammengesezt. Unter diesen ist aber das Verhältniß der Zahlen der Soldaten ein umgekehrtes Verhältniß, denn je mehr der Soldaten sind, desto kürzere Zeit kommt man mit dem

Gelde aus; das Verhältniß der Gulden hingegen ist ein gerades Verhältniß, denn je mehr man Geld hat, desto längere Zeit kann eben die Zahl Soldaten damit erhalten werden. Man findet daher die Auflösung durch folgende Proportionen:

$$\begin{array}{l} 2150 \text{ Sold.} : 124 \text{ Sold.} = 1 \text{ Jahr} : G \\ 16500 \text{ fl.} \quad : 709500 \text{ fl.} = G : G' \end{array}$$

$$2150 \times 16500 : 125 \times 709500 = 1 : G$$

$$G = \frac{125 \times 709500}{2150 \times 16500} = \frac{125 \times 7095}{2150 \times 165} = \frac{25 \times 7095}{2150 \times 33} = \frac{1 \times 7095}{86 \times 33}$$

$$= \frac{7095}{2838} = 2\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

Aufgabe. 50 Mann, die täglich 12 Stuuden arbeiten, wenden 21 Tage zu Ziehung eines Grabens von 2400 Fuß Länge an, wie viel Zeit haben 30 Mann, die täglich 10 Stunden arbeiten, nöthig, um einen Graben von 1800 Fuß Länge zu ziehen, wenn die Arbeit der lezteren, da sie mit einem lockereren Boden zu thun haben, in dem Verhältnisse, wie 2 : 3, schneller gehet, als die Arbeit der ersteren?

Hier ist das Verhältniß der Zahl, welche mit der gesuchten von einerley Art ist, nämlich der 21 Tage, zu der gesuchten aus vier einfachen Verhältnissen zusammengesezt, nämlich aus dem Verhältnisse der Zahlen der Arbeiter, der Länge der Gräben, der Stunden der Arbeit und der Geschwindigkeit der Arbeit. Von diesen ist das erste ein umgekehrtes Verhältniß, denn je weniger der Arbeiter sind, desto mehr Zeit brauchen sie zu der Arbeit; das zweyte ist ein gerades Verhältniß, denn je kleiner die Länge des Grabens ist, desto weniger Tage werden dazu erfordert; das dritte ist wiederum ein umgekehrtes Verhältniß, denn je weniger der täglichen Arbeitsstunden sind, desto mehr Tage braucht man zu der Arbeit. Eben so ist auch das vierte ein verkehrtes Verhältniß, denn je schneller die Arbeit fortgeht, desto weniger Tage gehen darauf. Demnach erhält man die Auflösung durch folgende Proportionen:

30 Mn. : 50 Mn. = 21 Tg. : G
2400 Fß. L. : 1800 Fß. L. = G : G'
10 Std. : 12 Std. = G' : G''
3 : 2 = G'' : G'''

$30 \times 2400 \times 10 \times 3 : 50 \times 1800 \times 12 \times 2 = 21 : G$

$G = \frac{21 \times 50 \times 1800 \times 12 \times 2}{30 \times 2400 \times 10 \times 3} = \frac{21 \times 5 \times 18 \times 12 \times 2}{3 \times 24 \times 10 \times 3} =$

$\frac{21 \times 5 \times 18}{3 \times 10 \times 3} = \frac{21 \times 5 \times 2}{10} = \frac{21 \times 10}{10} = 21$ Tage.

Aufgabe. 15 Leinenweber, die täglich 10 Stunden arbeiten, verfertigen in 5 Wochen und 3 Tagen 50 Stücke Leinwand, wie viel Leinweber werden erfordert, um 120 Stücke Leinwand zu verfertigen, wenn sie 3 Wochen und 4 Tage lang täglich 15 Stunden arbeiten sollen?

Hier ist das erste Verhältniß zwischen den Arbeiten und Arbeitern ein gerades, die lezten drey aber zwischen den Arbeitsstunden, Wochen und Tagen sind verkehrte. Demnach hat man folgende Proportionen:

50 Stcke L. : 120 Stcke L. = 15 Lwb. : G
15 Std. : 10 Std. = G : G'
3 Woch. : 5 Woch. = G' : G''
4 Tage : 3 Tage = G'' : G'''

$4 \times 3 \times 15 \times 50 : 120 \times 10 \times 5 \times 3 = 15 : G$

$G = \frac{15 \times 120 \times 10 \times 5 \times 3}{4 \times 3 \times 15 \times 50} = \frac{120 \times 10 \times 5 \times 3}{4 \times 3 \times 50} = \frac{120 \times 10 \times 5}{4 \times 50}$

$= \frac{120}{4} = 30$ Leinenweber.

Aufgabe. 2 Arbeiter pflügen in 2 Tagen 13 Morgen Acker, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten, wie viel Arbeiter gehören dazu, wenn sie in 7 Tagen 200 Morgen pflügen und täglich 10 Stunden arbeiten sollen?

Hier ist das erste Verhältniß zwischen den Morgen und Arbeitern ein gerades, die beyden lezteren aber zwischen den Tagen und Stunden der Arbeit, sind verkehrte.

13 Mg. : 200 Mg. = 2 Arb. : G
7 Tg. : 2 Tg. = G : G'
10 Std. : 8 Std. = G' : G''

13 × 7 × 10 : 200 × 2 × 8 = 2 : G

$$G = \frac{2 \times 200 \times 2 \times 8}{13 \times 7 \times 10} = \frac{2 \times 20 \times 2 \times 8}{13 \times 7} = \frac{20 \times 32}{91} = \frac{640}{91} =$$

$7\frac{3}{91}$ Arbeiter.

Es ist leicht einzusehen, daß der Bruch hier entweder durch einen Arbeiter weiter, oder durch etwas längere oder geschwindere Arbeit der übrigen ersezt werden müsse.

Aufgabe. Wenn 10 Weber, die 4 Wochen lang jede Woche 5 Tage und jeden Tag 10 Stunden arbeiten, 50 Stücke Tuch, jedes 40 Ellen lang und $1\frac{1}{4}$ Elle breit verfertigen; wie viel Stücke Tuch jedes 50 Ellen lang und $1\frac{1}{2}$ Ellen breit werden 18 Weber verfertigen, wenn sie 10 Wochen lang iede Woche 6 Tage und jeden Tag 12 Stunden arbeiten?

Hier ist das Verhältniß der gegebenen Zahl der Tuchstücke zu der gesuchten aus 6 einfachen Verhältnissen zusammengesezt, von welchen die Verhältnisse der Längen und Breiten des Tuchs verkehrte, die übrigen aber gerade sind.

Die Rechnung stehet daher also:

Web.		Web.		Stck.		Stck.
10	:	18	=	50	:	G
Wch.		Wch.				
4	:	10	=	G	:	G'
Tg.		Tg.				
5	:	6	=	G'	:	G''
St.		St.				
10	:	12	=	G''	:	G'''
Ell.L.		Ell.L.				
50	:	40	=	G'''	:	G^{IV}
Ell.B.		Ell.B.				
$\frac{3}{2}$	:	$\frac{5}{4}$	=	G^{IV}	:	G^{V}

Wird hier das erste und dritte, wie auch das erste und zweyte Glied mit allen gemeinschaftlichen Fa-

ctoren nach und nach dividirt, so erhält man am Ende

$$G = 18 \times 6 : \tfrac{1}{2} = 18 \times 12 = 216.$$

Sollte die grössere Zahl der Weber aus der kleineren und den übrigen Bestimmungsstücken gesucht werden, so wären die Verhältnisse der Wochen, Tage und Stunden der Arbeit verkehrte, die übrigen aber gerade.

§. 66.

Die übrigen Rechnungsregeln, womit praktische Schriftsteller ihre Lehrlinge — fast möchte man sagen mehr zu überladen, als — zu versehen pflegen, lassen sich alle unter zwey Klassen bringen. Sie gehören nämlich entweder zur Gesellschaftsrechnung, oder zur Regel Falsi. Hievon wird folgende Tafel eine deutlichere Uebersicht, als viele Worte, verschaffen können.

Gesellschaftsrechnung

Repartitionsrechnung		Vermischungsrechnung	
Gewinst-rechnung	Verlust-rechnung	Alligations-rechnung	Regel Cöci, oder Blind-rechnung.

Einige dieser Regeln bekommen wiederum verschiedene Namen, nach Verschiedenheit der Gegenstände, worauf sie angewandt werden. So wird z. B. die Verlustrechnung, wenn der Verlust in Waaren besteht, die wegen einer Gefahr des Schiffs über Bord geworfen werden mußten, Havereyrechnung genannt.

Die mancherley andern, in der obigen Tafel nicht ausdrücklich genannten, besonders kaufmännischen, Rechnungen sind entweder bloße Reductionsrechnungen, wovon das wichtigste schon vorgekommen ist, oder sie lassen sich doch leicht unter eine der hier genannten bringen, wie z. B. die Rabatt- Disconto- Thara- Fusti- Tauschrechnung, u. a. m.

§. 67.

Die Gesellschaftsrechnung ist das Verfahren, dessen man sich bedient, um ein gegebenes Gan-

zes in eine verlangte Anzahl Theile so zu theilen, daß diese Teile ein gegebenes Verhältniß zu einander haben. Sie hat ihren Namen von ihrem häufigen Gebrauche bey Concursen, Erbtheilungen und besonders Compagnie-Handlungen erhalten, wo der Fall sehr oft vorkommt, daß eine gewisse Summe von Gewinst oder Verlust unter die sämmtlichen Theilnehmer, nach dem Verhältnisse der Beyträge eines jeden, vertheilt werden soll. Da nun diese Beyträge entweder auf gleiche oder auf ungleiche Zeit gegeben seyn können, und im ersten Falle die einfache, im andern hingegen die zusammengesezte Regel de Tri angewandt werden muß, so hat dies Anlaß gegeben, auch die Gesellschaftsrechnung in die einfache und zusammengesezte einzutheilen.

Das Verfahren selbst besteht bey der einfachen Gesellschaftsrechnung darin, daß man die Proportionen ansezt:

Wie sich verhält die Summe aller Beyträge zu der Hauptsumme, welche nach dem Verhältnisse der einzelnen Beyträge vertheilt werden soll, so der Beytrag des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Theilnehmers, zu dem gesuchten proportionalen Theile des Gewinsts.

Alsdann geben die vierten Glieder dieser Proportionen, wenn man sie nach den gewöhnlichen Regeln sucht, die verlangten Theile.

Bey der zusammengesezten Gesellschaftsrechnung hat man eben so nach folgenden Proportionen zu verfahren:

Wie sich verhält die Summe der Producte aller Beyträge in die zugehörigen Zeiten, zu der zu vertheilenden Hauptsumme, so das Product aus dem Beytrage des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Theilnehmers in die Zeit, auf welche diese Beyträge stückweise gegeben worden sind, zu dem gesuchten proportionalen Theile.

Es wird dabey, den Grundsäzen der natürlichen Billigkeit gemäß, angenommen, daß die Gewinste, bey gleichen Zeiten, wie die Beyträge, und bey gleichen Beyträgen wie die Zeiten, folglich, wenn Zeiten und Beyträge ungleich sind, wie die Producte aus den

Beyträgen in die Zeiten sich verhalten, oder im zusammengesezten Verhältnisse der Beyträge und Zeiten stehen müssen.

Beyspiele.

I. Aufgabe. Drey Kaufleute haben auf 6 Jahre eine Handlungsgesellschaft errichtet, und dazu folgende Summen beygetragen: der 1te 4000 fl., der 2te 5000 fl., der 3te 3000 fl. Am Ende der 6 Jahre findet sich, daß sie 15000 fl. gewonnen haben. Es ist also die Frage, wie viel ein jeder von diesem Gewinste, nach dem Verhältnisse seines Beytrags, zu fordern habe?

Die Summe aller Beyträge ist hier = 12000; folglich hat man, wenn man den gesuchten Theil des 1ten mit G′, den des 2ten mit G″, den des 3ten mit G‴ bezeichnet, die Proportionen:

$$12000 : 15000 = 4000 : G'$$

oder, wenn man hier das erste und dritte Glied mit 1000 dividirt

$$12 : 15 \begin{cases} = 4000 : G'; & G' = \frac{15 \times 4000}{12} = 5000 \\ = 5000 : G''; & G'' = \frac{15 \times 5000}{12} = 6250 \\ = 3000 : G'''; & G''' = \frac{15 \times 3000}{12} = 3750 \end{cases}$$

$$\overline{15000}$$

II. Aufgabe. Drey Kaufleute vereinigen sich zu einer gewissen Unternehmung, so daß der 1te 100 Rthlr. auf 2 Monate, der 2te 150 Rthlr auf 3 Monate, der 3te 110 Rthlr. auf 6 Monate hergiebt. Mit diesem Gelde werden 655 Rthlr. gewonnen, welche nun unter ihnen vertheilt werden sollen, nach dem Verhältnisse ihrer Beyträge, und der Zeit, in welcher diese Beyträge benuzt wurden. Es ist also die Frage, wie viel jeder bekomme?

Die Rechnung stehet also:

100	Rthlr.	auf	2	Mon.	=	200	Rthlr.
150	=	=	3	=	=	450	=
110	=	=	6	=	=	660	=

Summe der Beyträge
im Verhältnisse der Zeiten = 1310 Rthlr.

Folglich ist, wenn man überall das 1te und 3te Glied sogleich mit 10 dividirt

$$131 : 955 \begin{cases} = 20 : G'; & G' = \frac{655 \times 20}{131} = 100 \\ = 45 : G''; & G'' = \frac{655 \times 45}{131} = 225 \\ = 66 : G'''; & G''' = \frac{655 \times 66}{131} = 330 \end{cases}$$

655

Daß es in Ansehung der Rechnung ganz gleichgültig sey, ob man Gewinst oder Verlust zu theilen habe, ist für sich selbst klar.

§. 68.

Unter der Vermischungsrechnung versteht man dasjenige Verfahren, wodurch man aus den gegebenen Verhältnissen verschiedener einfachen Materien findet, wie viel von jeder derselben zu einer gegebenen Menge der vermischten Materie, die aus jenen zusammengesezt werden soll, genommen werden müsse.

Die Vermischungsrechnung ist nach der Tafel (§. 74.) eine Art der Gesellschaftsrechnung, und wird völlig eben so wie diese geführt, nur daß hier in der im vorigen §. angegebenen Proportion statt: Summe der Beyträge, Summe der Ingredienzen, und statt: Beytrag des 1ten, 2ten, 3ten Theilnehmers, 1tes, 2tes, 3tes u. s. w. Ingrediens gesezt wird. Es werden daher einige Beyspiele zur Erläuterung hinreichend seyn.

Aufgabe. Als die tauglichste Masse, um die ledernen Schläuche der Schlangensprizen wasserdicht zu machen, wird empfohlen eine Mischung aus 2 ℔ klarem Pech, 1 ℔ gereinigtem Inschlitt, eben so viel ungesalzenem, bey gelinder Wärme ausgeschmolzenem, Schmalz, 6 Loth Wachs und 2 Loth Birkentheer. Wenn man nun einen Vorrath von 102 Pfunden dieser Masse bereiten wollte, wie viel von jedem der Ingredienzen müßte dazu genommen werden?

Da hier die Summe der Ingredienzen $= 4\frac{1}{4}$ ℔ $= \frac{17}{4}$ ℔ ist, so hat man folgende Proportionen

$$\frac{17}{4} : 102 = \begin{cases} 2 : \mathfrak{G}' \\ 1 : \begin{cases} \mathfrak{G}'' \\ \mathfrak{G}''' \end{cases} \\ \frac{3}{16} : \mathfrak{G}'''' \\ \frac{1}{16} : \mathfrak{G}^{V} \end{cases}$$

woraus man findet

$$\mathfrak{G}' = 2 \times 102 : \frac{17}{4} = 204 \times \frac{4}{17} = 12 \times 4 = 48$$

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{G}'' \\ \mathfrak{G}''' \end{matrix}\right\} = 102 : \frac{17}{4} = 102 \times \frac{4}{17} = 6 \times 4 = \begin{cases} 24 \\ 24 \end{cases}$$

$$\mathfrak{G}'''' = \frac{102 \times \frac{3}{4}}{17} = 6 \times \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$$

$$\mathfrak{G}^{V} = \frac{102 \times \frac{1}{4}}{17} = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

deren Summe = 102

Aufgabe. Als das beste Löschungsmittel für Gebäude, die in Braud gerathen sind, hat der verstorbene Apotheker von Aken zu Oerebro in Schweden im J. 1797 folgende Mischung empfohlen: 20 ℔ Eisensafran oder an dessen Statt fein gesiebtes Braunroth (Eisenocher), 30 ℔ gepülverten Alaun, 40 ℔ gepülverten grünen Vitriol, 200 ℔ geschlemmten und nach dem Austrocknen durchgesiebten Thon und 90 schwedische Kannen Wasser. Gesezt nun man wollte für einen gewissen Ort einen Vorrath von 20 Centnern von dieser trockenen Mischung bereiten, so entsteht die Frage: wie viel von jedem der genannten Ingredienzen müßte dazu genommen, und wie viel Wasser müßte der trockenen Masse von 20 Centnern bey dem Gebrauche zugesezt werden?

Drückt man, wie es hier am bequemsten geschehen kann, die gegebenen Größen der Ingredienzen durch den gemeinschaftlichen Namen des Centners aus, so erhält man, da alsdann die Summe der Ingredienzen $= 2\frac{9}{10}$ Centner $= \frac{29}{10}$ Centner ist, folgende Proportionen:

$$\frac{29}{10} : 20 = \begin{cases} \frac{2}{10} : \mathfrak{G}' \\ \frac{3}{10} : \mathfrak{G}'' \\ \frac{4}{10} : \mathfrak{G}''' \\ 2 : \mathfrak{G}'''' \end{cases}$$

Multiplicirt man nun das erste und dritte Glied mit 10, so wird daraus

$$29 : 20 = \begin{cases} 2 & : G' \\ 3 & : G'' \\ 4 & : G''' \\ 20 & : G'''' \end{cases}$$

woraus man endlich findet

$$G' = \frac{20 \times 2}{29} = \frac{40}{29} = 1\,\frac{11}{29} \qquad \begin{cases} 2 \\ 11 \\ 22 \\ 23 \end{cases}$$

$$G'' = \frac{20 \times 3}{29} = \frac{60}{29} = 2\,\frac{2}{29}$$

$$G''' = \frac{20 \times 4}{29} = \frac{80}{29} = 2\,\frac{22}{29} \qquad \frac{58}{29} = 2$$

$$G'''' = \frac{20 \times 20}{29} = \frac{400}{29} = 13\,\frac{23}{29}$$

2

deren Summe = 20 Centner.

Nun findet man die Quantität des, dieser Masse beyzumischenden, Wassers durch folgende Proportion

Centner : Centner = Kannen

$\frac{29}{10}$: 20 = 90 : G, oder

29 : 200 = 90 : G, welches giebt

$G = \frac{200 \times 90}{29} = \frac{18000}{29} = 620\frac{20}{29}$ schwedische Kannen.

Um das lezte Resultat mit andern bekannteren Maaßen von Flüssigkeiten vergleichen zu können, muß man noch wissen, daß 1 schwed. Kanne = 132 pariser Cub. Zollen ist, ferner daß 1 pariser Cubik-Zoll Brunnenwasser von 16 reaumurischen Graden Temperatur 370 Grane des alten französischen Gewichts wiegt, von welchem 1 ℔ = 9216 Granen ist.

Aufgabe. Bey guter schwarzer Tinte rechnet man auf 1 Maaß (4 ℔ Cöllnisch) Regenwasser, 6 Unzen Galläpfel, 3 Unzen Eisenvitriol und 1 Unze Gummi. Wollte man nun aus 5 Pfunden dieser trockenen Mischung Tinte bereiten, so ist die Frage: wie viel von jedem der genannten Ingredienzen dazu genommen, und wie viel Wasser zugesezt werden müßte?

Hier ist die Summe der Ingredienzen $\frac{10}{12}$ ℔ = $\frac{5}{6}$ ℔, daher die Proportionen

$$\frac{10}{12} : 5 = \begin{cases} \frac{6}{12} : \mathfrak{G}' \\ \frac{3}{12} : \mathfrak{G}'' \\ \frac{1}{12} : \mathfrak{G}''' \end{cases}$$

oder, wenn man das erste und dritte Glied mit 12 multiplicirt

$$10 : 5 = \begin{cases} 6 : \mathfrak{G}' \\ 3 : \mathfrak{G}'' \\ 1 : \mathfrak{G}''' \end{cases}$$

woraus man erhält

$$\mathfrak{G}' = \frac{30}{10} = 3$$
$$\mathfrak{G}'' = \frac{15}{10} = 1\frac{1}{2}$$
$$\mathfrak{G}''' = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

deren Summe = 5 ℔.

Endlich ergiebt sich die Quantität des dazu nöthigen Wassers aus folgender Proportion

℔ ℔ ℔

$\frac{5}{6} : 5 = 4 : \mathfrak{G}$

$\mathfrak{G} = 20 : \frac{5}{6} = 20 \times \frac{6}{5} = 24$ ℔ = 6 Maaß.

§. 69.

Die Alligationsrechnung, nach der Tafel (§. 66.) eine Art der Vermischungsrechnung, hat zur Absicht, aus den gegebenen Werthen verschiedener Theile, durch deren Vermischung ein neues Ganzes zusammengesezt werden soll, für einen gegebenen Werth dieses neuen Ganzen das Verhältniß der Theile zu finden.

Z. B. Wenn ein Weinhändler dreyerley Weine hat, wovon der eine, dem Eimer nach 18 Thlr., der andere 25 Thlr., der dritte 36 Thlr. werth ist, und er will daraus einen Wein von mittlerer Güte machen, der dem Eimer nach 30 Thlr. werth seyn soll, so muß er wissen, wie viel von jedem Weine er auf einen Eimer des andern nehmen müsse.

Die Alligationsrechnung unterscheidet sich also von der Vermischungsrechnung dadurch, daß das Verhältniß der gesuchten Theile des durch die Vermischung hervorzubringenden Ganzen bey jener erst gesucht werden muß, ehe man diese Theile selbst finden kann, bey dieser aber schon gegeben ist.

Da aber die Gründe dieser Rechnung sowohl, als der Regel Cöci, d. h. der Methode, auf eine Rechnungsfrage nicht nur eine Antwort in ganzen Zahlen, sondern die Anzahl aller, in solchen überall möglichen, Antworten zu finden, wegen der mannigfaltigeren Verwickelungen der Größen, die dabey vorkommen, ohne Buchstabenrechnung sich nicht wohl allgemein vorstellig machen lassen, und wir eines Theils mit einem leeren Regelwerke uns nicht abgeben, andern Theils aber zur Buchstabenrechnung vielmehr vorbereiten, als sie entbehrlich machen wollen, so übergehen wir hier diese beyden, und machen den Beschluß dieses Abschnitts mit der Regel Falsi.

§. 70.

Vermittelst der Regel Falsi findet man eine verlangte Zahl durch die willkührliche Annahme einer andern, unter der Voraussezung, als ob sie die Eigenschaften der verlangten hätte. Die Methode selbst besteht in folgendem:

Man wählt nach Belieben eine Zahl, nimmt mit dieser alle Veränderungen vor, welche mit der gesuchten vorgenommen werden sollen, und sieht dann zu, was herauskommt. Kommt das heraus, was die Aufgabe verlangt, so hat man die gesuchte Zahl glücklicher Weise errathen. Erhält man aber ein anderes Resultat, so seze man folgende Proportion an: Wie sich verhält das gefundene Resultat zu der angenommenen Zahl, so verhält sich die gegebene Zahl zu der gesuchten.

Dies nennt man alsdann die einfache Regel Falsi. Z. B.

Man verlangt eine Zahl, deren Hälfte, dritter und vierter Theil 39 ausmachen.

Diese Aufgabe aufzulösen, nehme man nach Belieben eine Zahl an, die sich leicht in die genannten Theile theilen läßt, wie die Zahl 12, deren Hälfte ist 6, ihr dritter Theil 4, und ihr vierter Theil 3.

Diese drey Theile, $6 + 4 + 3$, machen zusammen nur 13, folglich ist die angenommene Zahl 12 nicht die verlangte, denn die genannten Theile von dieser sollen 39 ausmachen. Man schließe nun also:

$$13 : 12 = 39 : \mathfrak{G}$$

und hieraus ergiebt sich $\mathfrak{G} = \frac{12 \times 39}{13} = 36$.

Diese Zahl ist nun die verlangte, denn es ist

$\frac{36}{2} = 18$

$\frac{36}{3} = 12$

$\frac{36}{4} = 9$

folglich $39 =$ Summe der Theile.

Wiefern dieses Verfahren auf der Regel de Tri beruhet, bedarf es keines besondern Beweises, und wiefern es nicht darauf beruhet, ist es ein bloßes Probiren.

§. 71.

Wenn bey einer Aufgabe dieser Art, die gegebene Zahl nicht bloß aus Vielfachen und Theilen der gesuchten entsteht, sondern zu denselben noch eine gegebene Zahl addirt, oder davon abgezogen werden muß, so reicht die einfache Regel Falsi zur Auflösung nicht hin, sondern man muß seine Zuflucht zu der doppelten nehmen, und folgendermaßen verfahren:

I. Man nehme nacheinander zwey Zahlen an, und sehe zu, was für ein Resultat jede giebt.

II. Diese beyden Resultate vergleiche man mit der gegebenen Zahl. Der Unterschied zwischen jedem derselben und der gegebenen Zahl heißt Irrthum, und zwar, zu wenig, wenn die gefundene Zahl kleiner, zu viel, wenn sie größer ist, als die gegebene.

III. Die Irrthümer heißen ähnlich, wenn beyde zu wenig, oder beyde zu viel, unähnlich, wenn der eine zu viel, der andere zu wenig ist.

IV. Sind die Irrthümer ähnlich, so nehme man ihren Unterschied; sind sie unähnlich, so nehme man ihre Summe.

V. Nun suche man die vierte Proportionalzahl zu diesem Unterschied, oder dieser Summe, zu dem Unterschiede der angenommenen Zahlen, und zu dem einen Irrthum.

VI. Diese Zahl addire man zu der angenommenen, welche den in der Proportion (Nro. V.) gebrauchten Irrthum gab, wenn der Irrthum zu wenig, oder man subtrahire sie von derselben, wenn er zu viel war, so giebt im einen Falle die Summe, im andern der Unterschied die gesuchte Zahl. Z. B.

Aufgabe. Eine Person hat 400 Rthlr. unter vier Arme so vertheilt, daß der 2te nur die Hälfte von dem Antheile des 1ten, der 3te $\frac{1}{4}$ weniger, als der 2te, und der 4te $\frac{2}{3}$ weniger, als der 3te bekam. Es ist die Frage: wie viel jeder bekommen habe?

Man seze einmal

den Antheil des 1ten = 40 Rthlr.
so wäre der = = 2ten = 20 =
= = = 3ten = 15 =
= = = 4ten = 5 =
deren Summe = 80

Diese Summe sollte aber = 400 seyn. Folglich ist der Irrthum = 400 — 80 = 320, und zwar zu wenig, also kann man ihn, der Kürze wegen, mit — 320 bezeichnen.

Man seze diesen Irrthum zu der angenommenen Zahl die ihn gab $\left\{\begin{matrix} 40 \\ -320 \end{matrix}\right\}$.

Nun seze man weiter

den Antheil des 1ten = 56
so wäre der = = = 2ten = 28
= = = = 3ten = 21
= = = = 4ten = 7

deren Summe = 112

Diese Summe sollte aber = 400 seyn; der Irrthum ist also = 400 — 112 = 288 abermal zu wenig; weßwegen man ihn auch mit — 288 bezeichnen kann.

Auch diesen Irrthum schreibe man zu der Zahl, die ihn gab $\left\{\begin{matrix} 40 \\ -320 \end{matrix}\right\}$.

Da die Irrthümer ähnlich sind, so nehme man jezt ihren Unterschied 320 — 288 = 32; Eben so nehme man auch den Unterschied der angenommenen Zahlen 56 — 40 = 16, so ergiebt sich hieraus die Proportion

32 : 16 = 288 : G

dividirt man das 1te und 2te Glied mit 16, so ist

2 : 1 = 288 : G

dividirt man die beyden Vorderglieder mit 2, so ist

1 : 1 = 144 : G

folglich G = 144

Demnach ist

des 1ten Antheil = 56 + 144 = 200
des 2ten = = = 100
des 3ten = = = 75
des 4ten = = = 25

deren Summe = 400

Dieses ganze Verfahren beruhet auf dem Schlusse: Wie sich verhält die Summe oder der Unterschied der Irrthümer zum Unterschiede der angenommenen Zahlen, welche sie gaben, so verhält sich der eine Irrthum zu der Zahl, welche zu der angenommenen, die ihn gab, entweder hinzugesezt, oder von ihr weggenommen werden muß, um die gesuchte zu erhalten.

Daß man hiebey nicht aus dem Falschen, sondern aus dem, was in ihm wahr ist, schließe, bedarf wohl kaum erinnert zu werden.

In Absicht der willkührlich anzunehmenden Zahlen ist noch zu bemerken, daß die Bequemlichkeit anräth, immer nur solche zu wählen, bey welchen sich die in der Aufgabe verlangten Theilungen ohne Rest verrichten lassen. Auch sieht man leicht, daß man für die Proportion kleinere Zahlen bekommt, wenn man die zweyte nach Gefallen anzunehmende Zahl der ersten sehr nahe annimmt.

§. 72.

Die in diesem Abschnitte abgehandelten uebst allen übrigen, hier übergangenen, Regeln der sogenannten Rechenmeister sind jedem, der sich die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen gründlich bekannt gemacht hat, und nur die ersten Anfangsgründe der Algebra versteht, für immer entbehrlich.

Diese Bemerkung wird zureichen, um dem Fleiße solcher Jünglinge, welche die Arithmetik nicht bloß für ihren künftigen Hausbedarf wie eine Kunstfertigkeit erlernen, sondern, in Hinsicht auf den höheren Zweck der Verstandsbildung, als eine reine Vernunftwissenschaft sich zu eigen machen wollen, die gehörige Richtung zu geben.

Unter dem großen Haufen der arithmetischen Kunstregeln zeichnet sich indessen die Regel Falsi in so fern auf eine ehrenvolle Weise aus, als sie der algebraischen Methode schon um vieles näher kommt, und als man einen Theil von ihr, nämlich: Eine Zahl anzunehmen, und das Resultat, was sie giebt, mit dem, was die gesuchte geben soll, zu vergleichen, sowohl in der Analysis, als in andern Theilen der Mathematik auch jetzt noch häufig braucht. Ausserdem wird die Regel Falsi in der Geschichte des menschlichen Verstands dadurch immer merkwürdig bleiben, daß die größten Denker in Fällen, da alle andere Kunstgriffe sie verliessen, sich ihrer, als eines fruchtbaren Erfindungsmittel mit dem glücklichsten Erfolge bedient haben.

Sechster Abschnitt.

Von den Theilern der Zahlen.

§. 73.

Die Lehre von dem Aufheben der Brüche führte uns oben (§. 31.) auf das Bedürfniß, das größte gemeine Maaß zweyer Zahlen zu finden. Daselbst wurde auch schon der Unterschied zwischen einfachen und zusammengesezten Zahlen, samt den übrigen dazu gehörigen Grundbegriffen erklärt und kürzlich gezeigt, worauf es bey Aufsuchung des gemeinen Maaßes mehrerer Zahlen hauptsächlich ankomme; aber die Auseinandersezung des dabey zu beobachtenden Verfahrens mußte, um eine allzulange Unterbrechung zu vermeiden, bis hieher verschoben werden. Ehe wir nun dazu schreiten können, muß der Unterschied der einfachen und zusammengesezten Zahlen vorher noch etwas weiter entwickelt, und einige darauf beruhende Sätze von den Theilern der Zahlen vorausgeschickt werden.

§. 74.

Zusammengesezte Zahlen sind (nach §. 31.) solche, welche durch Multiplication aus andern einfachen Zahlen entstanden sind; folglich sind vermöge des Gegensazes, einfache Zahlen solche, welche nicht wiederum aus andern durch Multiplication entstanden sind. So sind z. B. alle geraden Zahlen, ausser der Zahl 2, zusamengesezte, die Zahl 2 hingegen und die meisten ungeraden Zahlen einfache. Die einfachen Zahlen,

welche man sonst auch Primzahlen nennt, werden demnach als die Factoren der zusammengesezten, und diese als die Produkte von jenen betrachtet, und hieraus erklären sich die Redensarten: eine Zahl aus ihren Factoren zusammensezen, und sie in ihre Factoren zerfällen. Da nun alle Facroren eines Products das Product auch ohne Rest dividiren, eine Zahl aber, die eine andere ohne Rest dividirt, ein Maaß oder ein Theiler der andern heißt, so sind mithin die Primzahlen die Maaße, oder die Theiler der zusammengesezten; hingegen haben die Primzahlen kein anderes Maaß, als sich selbst und die Einheit. Dividirt nun einerley Zahl mehrere andere ohne Rest, so heißt sie das gemeinschaftliche Maaß dieser andern, und sie heißt ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, wenn keine größere Zahl sie alle ohne Rest dividirt. Z. B. die Zahl 3 ist ein gemeinschaftliches Maaß der Zahlen 15, 24, 36, denn sie dividirt sie alle ohne Rest, und weil keine andere größere Zahl diese drey Zahlen auch ohne Rest dividirt, so ist die Zahl 3 ihr größtes gemeinschaftliches Maaß. Die Einheit ist demnach das gemeinschaftliche Maaß aller Zahlen, und jede Zahl ein Maaß, und zwar das größte Maaß, von ihr selbst. Haben mehrere Zahlen, die zwar selbst zusammengesezte Zahlen sind, doch kein gemeinschaftliches Maaß, so werden sie Primzahlen unter sich genannt. So sind z. B. die Zahlen 8, 21, 25, an sich selbst keine Primzahlen, sondern zusammengesezte, aber sie sind Primzahlen unter sich, weil sie kein gemeinschaftliches Maaß haben.

§. 75.

Die merkwürdigsten Eigenschaften der Theiler der Zahlen, so weit sie zu unserm gegenwärtigen Zwecke gehören, sind in folgenden Säzen enthalten.

I. Jede Zahl ist entweder eine Primzahl, oder eine aus Primzahlen zusammengesezte Zahl.

Denn ist sie keine Primzahl, so bestehet sie aus Factoren. Sind nun diese Factoren auch zusammengesezt, so lassen sie sich aufs neue in Factoren zerfällen, und das so lange fort, bis man endlich auf Primzah-

len kommt. Z. B. die Zahl 360 ist eine zusammengesezte Zahl, denn sie bestehet aus den Factoren 12 und 30, oder es ist 360 = 12 × 30; diese beyden Factoren sind aber selbst auch zusammengesezte Zahlen, denn der erstere läßt sich wiederum in die Factoren 3 und 4, der leztere hingegen in die Factoren 5 und 6 zerfällen; es ist also auch 360 = 3 × 4 × 5 × 6. Unter diesen sind nun die Zahlen 4 und 6 noch zusammengesezt; zerfällt man also auch diese in ihre Factoren, so findet man endlich 360 = 3 × 2 × 2 × 5 × 2 × 3, und dies sind nun lauter Primzahlen.

II. Eine Zahl, die in einem von den Factoren eines Products aufgehet, muß auch in dem Producte selbst aufgehen; denn sie ist alsdann auch ein Factor des Products. Z. B. die Zahl 42 ist ein Product aus den Factoren 6 und 7, oder es ist 42 = 6 × 7. Nun gehet in dem einen Factor 6 die Zahl 3 auf, folglich muß eben diese Zahl 3 auch in dem Producte 42 aufgehen.

Denn wenn man die Zahl 6 in ihre Factoren zerfällt, so findet man 6 = 2 × 3, und demnach 42 = 2 × 3 × 7, folglich ist die Zahl 3 auch ein Factor des Products 42, und muß also nothwendig in demselben aufgehen.

III. Eine Zahl, die in zwey andern Zahlen aufgehet, muß auch in der Summe dieser beyden Zahlen aufgehen.

Denn da sie in den beyden Zahlen aufgehet, so ist sie sowohl in der einen als in der andern ein oder etlichemal, folglich in beyden zusammen etlichemal, ohne Rest enthalten, und gehet also in der Summe der beyden Zahlen auf. Z. B. die Zahl 7 gehet sowohl in der Zahl 14 als in der Zahl 56 auf, denn sie ist in der ersten zweymal und in der lezten achtmal enthalten, sie muß also auch in der Summe 70 dieser beyden Zahlen aufgehen, da sie so oft darin enthalten ist, als in beyden Summanden zusammen, nämlich 8 + 2mal, das ist, 10mal.

IV. Eine Zahl, die in der Summe zweyer Zahlen und in einer von den beyden Zahlen selbst aufgehet, muß auch in der andern aufgehen.

Denn da sie, nach der Vorausſezung, in einer von den beyden Zahlen, und in der Summe ein oder etlichemal ohne Rest enthalten ist, so muß sie auch in der andern ein oder etlichemal ohne Rest enthalten seyn, und also auch in derselben aufgehen. Z. B. die Zahl 98 ist die Summe der Zahlen 35 und 63, oder es ist $98 = 35 + 63$. Nun gehet die Zahl 7 in der Summe 98, und in dem einen von den Summanden 63 auf, denn 7 ist in 98 14mal und in 63 9mal enthalten, folglich muß eben diese Zahl 7 auch in dem andern Summanden 35 etlichemal enthalten seyn, und also darin aufgehen; wie sich dies auch wirklich verhält, indem 7 in 35 5mal enthalten ist.

V. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der grösseren aufgehet, so ist sie das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen.

Denn da die kleinere in ihr selbst, und, nach der Vorausſezung, auch in der größeren aufgehet, so ist sie ein gemeinschaftliches Maaß von beyden, und zwar das größte gemeinschaftliche Maaß, weil offenbar keine größere Zahl in der kleineren aufgehen kann. Z. B. die Zahl 45 ist das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 90 uud 45, denn sie gehet in der Zahl 90 auf, da sie zweymal darin enthalten ist, sie gehet aber aber in ihr selbst auf, weil sie gerade einmal in ihr enthalten ist; aber eine größere Zahl, als die Zahl 45 selbst ist, kann unmöglich in derselben aufgehen, folglich ist die Zahl 45 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 90 und 45.

VI. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der grösseren nicht aufgehet, so kann das gemeinschaftliche Maaß von beyden nicht größer seyn, als der Rest, welcher sich bey der Division der größeren durch die kleinere ergiebt.

Denn die größere Zahl besteht aus dem Producte der kleineren in den Quotienten und dem Reste, oder die größere ist die Summe des Products der kleineren in den Quotienten, und des Restes. Ein gemeinschaftliches Maaß beyder Zahlen gehet also in der Summe des Products aus der kleineren in den Quotienten und

des Restes, und (nach Nro. II.) in dem Producte der kleineren in den Quotienten selbst, welches der eine von den Summanden dieser Summe ist, auf, und muß daher (nach Nro. IV.) auch im Reste, als dem andern Summanden, aufgehen, kann also nicht größer seyn, als dieser Rest. Z. B. es seyen die zwey Zahlen 75 und 36, wenn man die erstere derselben durch die leztere dividirt, so findet man zum Quotienten 2 und zum Rest 3; demnach ist $75 = 2 \times 36 + 3$, und folglich gehet ein gemeinschaftliches Maaß der beyden Zahlen 75 und 36 in der Summe des Products 2×36 der kleineren Zahl 36 in den Quotienten 2, und des Restes 3, und in dem Producte 2×36 der kleineren Zahl 36 in den Quotienten 2 auf, und muß daher auch in dem Reste 3 aufgehen, kann also nicht größer, als dieser, seyn.

VII. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größeren nicht aufgehet, aber wohl der Rest in der kleineren, so ist der Rest das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen.

Denn wenn der Rest in der kleineren Zahl aufgehet, so gehet er (nach Nro. II.) auch in dem Producte der kleineren Zahl in dem Quotienten auf, er gehet aber auch in sich selbst auf, und folglich (nach Nro. III.) auch in der Summe des Products der kleineren Zahl in den Quotienten und des Rests, das ist in der größeren Zahl, und ist also ein gemeinschaftliches Maaß der beyden Zahlen und zwar nach (Nro. VI.) das größte. Z. B. es seyen die zwey Zahlen 86 und 28, dividirt man die größere durch die kleinere, so findet man zum Reste 2. Dieser Rest 2 gehet nun in der kleineren Zahl 28 auf und folglich auch in dem Producte 3×28 der kleineren Zahl 28 in dem Quotienten 3; er gehet aber auch in sich selbst auf, und folglich auch in der Summe $3 \times 28 + 2$ des Products der kleinern Zahl in den Quotienten, und des Rests, welche Summe der größeren Zahl 86 gleich ist; dieser Rest ist also ein gemeinschaftliches Maaß der beyden Zahlen 86 und 28, und er ist das größte gemeinschaftliche Maaß derselben, weil in ihm selbst keine größere Zahl aufgehen kann

VIII. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größeren, und auch der Rest in der kleineren, nicht aufgehet, so ist das größte gemeinschaftliche Maaß der kleineren Zahl und des Rests auch das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden ersteren Zahlen.

Denn hätten die beyden Zahlen noch ein größeres Maaß, so müßte dasselbe (nach Nro. VI.) auch im Reste aufgehen, und wäre folglich ein gemeinschaftliches Maaß der kleineren Zahl und des Rests, und zwar noch größer als das, was vorher schon als das größte angenommen war, welches widersprechend ist. Z. B. es seyen die beyden Zahlen 96 und 34, von dieser gehet die kleinere in der größeren nicht auf, sondern es bleibt bey der Division der Rest 28, aber auch dieser Rest gehet in der kleineren 34 nicht auf. Nun ist die Zahl 2 das größte gemeinschaftliche Maaß der kleineren Zahl 34 und des Rests 28; wäre diese nun nicht auch das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden ersteren Zahlen 96 und 34, sondern hätten diese noch ein größeres, so müßte dasselbe auch in dem Reste 28 aufgehen, und wäre folglich ein gemeinschaftliches Maaß der kleineren Zahl 34, und des Rests 28, und zwar wäre es noch größer, als die Zahl 2, welche man vorher schon als das größte gemeinschaftliche Maaß der kleineren Zahl 34 und des Rests 28 angenommen hatte, welches ein offenbarer Widerspruch ist.

§. 76.

Wenn man nun das größte gemeinschaftliche Maaß zweyer Zahlen finden soll, so verfahre man also:

I. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; gehet diese in ihr auf, so ist sie selbst das größte gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen. Z. B. so ist die Zahl 14 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 14 und 56, und die Zahl 17 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 136 und 17.

14) 56⌉4 17) 136⌉8

II. Wenn aber die kleinere Zahl in der größeren nicht aufgehet, so dividire man die kleinere Zahl mit dem Reste; gehet nun der Rest in der kleineren Zahl auf, so ist dieser Rest das größte gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen. Z. B.

21) 49⌉2 12) 66⌉5
42⌊ 60⌊
7) 21⌉3 6) 12⌉2
21⌊ 12⌊

III. Bleibt aber bey der zweyten Division auch wieder ein Rest, so dividire man damit abermal den lezten Divisor, und fahre so immer fort, bis man zulezt auf einen Rest kommt, welcher im vorigen Divisor aufgehet, so ist dieser Rest das größte gemeinschaftliche Maaß der ersten beyden Zahlen. Bekommt man aber bey diesem Verfahren zum lezten Reste 1, so ist dies eine Anzeige, daß die beyden gegebenen Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit, haben, also Primzahlen unter sich sind. Z. B. es soll das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 34 und 66 gefunden werden, so stehet die Rechnung also:

34) 66⌉1
34⌊
32) 34⌉1
32⌊
2) 32⌉16
32⌊

Eben so findet man das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 176 und 284, 256 und 1388, 125 und 365.

176) 284 (1 256) 1388 (5 125) 365 (2
176 1280 250
108) 176 (1 108) 256 (2 115) 125 (1
108 216 115
68) 108 (1 40) 108 (2 10) 115 (11
68 80 110
40) 68 (1 28) 40 (1 5) 10 (2
40 28 10
28) 40 (1 12) 28 (2
28 24
12) 28 (2 4) 12 (3
24 12
4) 12 (3
12
12

Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet:

für Nro I. aus Nro V. des vorigen §.
für Nro II. aus Nro VII. des vorigen §.
für Nro III. aus Nro VIII. des vorigen §.

Denn da im dritten Falle der nach dem eben beschriebenen Verfahren gefundene Rest das größte gemeinschaftliche Maaß für das lezte Paar Zahlen ist, so ist er es auch (nach Nro. VIII. des vorigen §.) für das vorhergehende Paar, und so immer weiter zurück für alle vorhergehenden Paare bis auf das erste.

§. 77.

Sind aber mehr als zwey Zahlen gegeben, und man soll ihr größtes gemeinschaftliches Maaß finden, so ordne man diese Zahleu nach ihrer Größe, so, daß die kleinste die erste, und die größte die lezte wird; alsdann suche man zuerst das größte gemeinschaftliche Maaß der ersten beyden Zahlen. Hat man dieses gefunden, so betrachte man es nun als die erste Zahl, und suche von dieser und von der dritten Zahl das größte gemeinschaftliche Maaß. Dieses betrachte man hierauf wiederum als die erste Zahl, und suche nun

eben so von dieser und der vierten das größte gemeinschaftliche Maaß, nnd so fahre man immer fort, bis man mit allen gegebenen Zahlen zu Ende ist, so ist das größte gemeine Maaß des lezten Paars Zahlen auch das größte gemeinschaftliche Maaß aller gegebenen Zahlen.

Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens fließt aus eben den Gründen, wie im vorigen §.

Z. B. es soll das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 105, 60, 25, 135 gesucht werden.

25
60
105
135

25) 60 ⌉ 2
50 ⌊
10) 25 ⌉ 2
20 ⌊
5) 10 ⌉ 2
10 ⌊

5) 105 ⌉ 21
10 ⌊
5
5
⌊

5) 135 ⌉ 27
10 ⌊
35
35
⌊

Eben so findet man das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 85, 119, 51, 153.

51
85
119
153

51) 85 ⌉ 1
51 ⌊
34) 51 ⌉ 1
34 ⌊
17) 34 ⌉ 2
34 ⌊

18) 119 ⌉ 6
102 ⌊
17) 17 ⌉ 1
17 ⌊

17) 153 ⌉ 9
153 ⌊

Eben so kann man auch das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 46, 115, 138, 92, 207, 161 finden.

46
92
115
138
161
207

46) 92 ⌉ 2
92 ⌊

46) 115 ⌉ 2
92 ⌊
23) 46 ⌉ 2
46 ⌊

23) 138 ⌉ 6
138 ⌊

23) 161 ⌉ 7
161 ⌊

23) 207 ⌉ 9
207 ⌊

§. 78.

Die in den beyden vorigen §§. gegebenen Regeln das größte gemeinschaftliche Maaß, oder den größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer oder mehrerer Zahlen zu finden, sind ganz allgemein, und gelten für alle Fälle, die gegebenen Zahlen mögen seyn, welche man immer will. Es giebt aber auch einige besondere Kennzeichen, deren man sich zur Aufsuchung der gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen öfters mit Vortheil und Bequemlichkeit bedienen kann. Die merkwürdigsten derselben werden in folgenden Säzen angegeben:

I. Alle Zahlen, deren lezte Ziffer eine von diesen ist: 0, 2, 4, 6, 8, oder, mit einem Worte, alle geraden Zahlen lassen sich durch 2 dividiren; denn sie sind alle durch Zusammensezung der Zahl 2. mit andern Zahlen entstanden.

II. Alle Zahlen, deren lezte Ziffer 5 oder 0 ist, lassen sich durch 5 dividiren, denn sie sind auch durch Zusammensezung der Zahl 5 mit andern Zahlen entstanden.

III. Alle Zahlen, welche am Ende eine 0 haben, die sonst auch runde Zahlen genannt werden, lassen sich durch 10 dividiren; eben so lassen sich alle Zahlen, die am Ende zwey Nullen haben, durch 100, alle die am Ende drey Nullen haben, durch 1000 u. s. w. dividiren; denn sie sind durch Zusammensezung der lezteren mit andern Zahlen entstanden.

IV. Alle Zahlen, welche, wenn man ihre Ziffern alle als einfache Einheiten ansieht, und von denselben 3 so oft wegwirft, als man kann, nichts übrig lassen, oder welche, wenn man ihre Ziffern ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen addirt, eine Zahl geben, die sich durch 3 dividiren läßt, lassen sich auch durch 3 dividiren.

Denn wenn man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. durch 3 multiplicirt, so bekommt man zu Producten

lauter Summen, welche 3 verschiedenemal enthalten, es ist nämlich $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 3 + 3$, $3 \times 3 = 3 + 3 + 3$ u. s. w; diese Summen aber werden vermittelst unserer gewöhnlichen Ziffern dergestalt geschrieben, daß man 3×3 oder 9 verschiedenemal wegwirft und nur die übrigen 3 oder $3 + 3$ behält; wie man z. B. anstatt $3 + 3 + 3 + 3$ schreibt 12, welches, wenn man die Ziffern ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen addirt, nur 3 giebt. Demnach werden alle Producte, welche entstehen, indem eine Zahl, was für eine man will, durch 3 multiplicirt wird, durch Ziffern ausgedrückt, welche sich durch 3 dividiren lassen, wenn man mit ihnen auf die angewiesene Art verfahrt. Z. B. die Zahl 65847 giebt, wenn man ihre Ziffern auf die angezeigte Art addirt, 30, diese Zahl aber ist durch 3 theilbar, folglich läßt sich auch die erstere durch 3 dividiren.

Eben so lassen sich auch die Zahlen 81740652 und 291750261 durch 3 dividiren, denn eine wie die andere giebt durch das beschriebene Verfahren 33, welches durch 3 theilbar ist.

V. Eben dieses gilt auch von der Zahl 9. Um den Grund davon einzusehen darf man nur in dem vorigen Saze und Beweis allenthalben anstatt 3, schreiben 3×3. Z. B. die Zahl 26158302 giebt, wenn man ihre Ziffern auf die mehrerwähnte Art zusammenzählt, 27, da nun diese Zahl durch 9 theilbar ist, so läßt sich auch die erstere durch 9 dividiren. Eben so lassen sich die Zahlen 35072945 und 719086473 durch 9 dividiren, denn die erstere giebt, wenn man sie nach dem angewiesenen Verfahren behandelt, 36, und die leztere 45, welche beyde Zahlen durch 9 theilbar sind.

§. 79.

Wenn zwey Zahlen gegeben sind, und man soll die kleinste ihnen meßbare Zahl finden, so können die gegebenen Zahlen entweder Primzahlen oder zusammengesezte Zahlen seyn.

I. Wenn die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich sind, so multiplicire man die eine durch die andere, und das Product wird die kleinste ihnen beyden meßbare Zahl seyn. Z. B. die kleinste den beyden Zahlen 7 und 13 meßbare Zahl ist 91.

Denn da die gegebenen Zahlen in der ihnen meßbaren Zahl aufgehen müssen, so müssen sie Factoren derselben, und diese muß folglich ein Product von ihnen seyn. Da sie aber, nach der Voraussezung, als Primzahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben, so giebt es kein kleineres Product von ihnen beyden, als dasjenige, welches entstehet, wenn man die eine mit der andern multiplicirt, und folglich ist das solchergestalt erhaltene Product die kleinste ihnen beyden meßbare Zahl.

II. Wenn die gegebenen Zahlen zusammengesezte Zahlen sind, so suche man (nach §. 76.) ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, dividire durch dasselbe die eine von beyden, und multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten die andere, so ist das Product die kleinste ihnen meßbare Zahl. So ist z. B. die kleinste den beyden 8 und 36 meßbare Zahl 72.

Denn da die gegebenen Zahlen, nach der Voraussezung, zusammengesezte sind, so sind sie Producte, deren jedes aus dem gemeinschaftlichen Maaße beyder und aus einem eigenthümlichen Factor zusammengesezt ist. Dividirt man nun die eine mit dem größten gemeinen Maaße beyder, so erhält man zum Quotienten ihren kleinsten eigenthümlichen Factor; multiplicirt man nun mit diesem die andere Zahl, so gehen, weil diese andere Zahl auch das größte gemeine Maaß beyder Zahlen als einen Factor enthält (nach §. 75. Nro II.), beyde Zahlen in diesem Producte auf. Da aber dieses Product durch Multiplication der einen Zahl in den kleinsten eigenthümlichen Factor der andern erhalten worden ist, so ist es die kleinste unter den Zahlen, worin die beyden gegebenen Zahlen aufgehen, und folglich die kleinste ihnen beyden meßbare Zahl.

§. 80.

Sind aber mehr als zwey Zahlen gegeben, und man soll die kleinste ihnen meßbare Zahl finden, so ordne man die gegebenen Zahlen nach ihrer Größe, so, daß die kleinste die erste wird, alsdann suche man nach dem vorigen §. die kleinste den ersten beyden meßbare Zahl, zu dieser nehme man nun die dritte der gegebenen Zahlen, und suche eben so die kleinste diesen beyden meßbare Zahl, und so fahre man fort, bis man mit allen gegebenen Zahlen zu Ende ist, so ist die kleinste, dem lezten Paare meßbare, Zahl auch die kleinste allen gegebenen Zahlen meßbare Zahl.

Der Beweis wird, eben so, wie die Auflösung, auf den vorigen §. zurückgeführt. Z. B. die kleinste den drey Zahlen 6, 54, 72 meßbare Zahl wird also gefunden:

Gegebene Zahlen, 6, 54, 72.

6) 54 ⌉ 9
54 ⌊ 6
54 = kleinste meßbare Zahl der beyden 6 und 54.

54) 72 ⌉ 1
54 ⌊
18) 54 ⌉ 3
54 ⌊

72
3
216 = kleinste meßbare Zahl der drey gegebenenen 6, 54 und 72.

Zweytes Beyspiel

die kleinste den fünf Zahlen 5, 6, 8, 9, 12 meßbare Zahl zu finden.

5 × 6 = 30 = kleinste meßbare Zahl der beyden 5 und 6.

sein Zähler und Nenner sind so beschaffen, daß sie sich leicht in ihre einfachen Factoren zerfällen lassen, so ist die Sache am geschwindesten geschehen, wenn man beyde durch ihre einfachen Factoren ausdrückt. Denn alsdann ergeben sich sogleich die einfachen Factoren, welche beyde mit einander gemein haben, und womit man also beyde dividiren, oder welche man in beyden gegen einander wegstreichen kann. Z. B. der Bruch $\frac{20}{35}$ kann leicht aufgehoben werden, wenn man seinen Zähler und Nenner in ihre einfachen Factoren zerfällt, und mit dem, welcher beyden gemeinschaftlich ist, beyde dividirt; denn man findet auf diese Art $\frac{20}{36} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{4}{7}$. Eben so findet man $\frac{18}{54} = \frac{3 \times 6}{9 \times 6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Sind hingegen der Zähler und Nenner eines Bruchs von der Art, daß sich ihre einfachen Factoren nicht leicht finden lassen, so suche man (nach §. 76.) das größte gemeinschaftliche Maaß derselben, und dividire beyde damit, alsdann giebt der Quotient den kleinsten Ausdruck, auf welchen dieser Bruch gebracht werden kann. Z. B. es soll der Bruch $\frac{153}{675}$ auf den kleinsten Ausdruck gebracht werden, so findet man für das gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners die Zahl 9, und wenn man damit dividirt, so erhält man zum Quotienten $\frac{17}{75}$. Eben so findet man für den Bruch $\frac{312}{572}$ den kleinsten Ausdruck $\frac{6}{11}$.

§. 82.

Wenn mehrere Brüche gegeben sind, welche auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden sollen, so suche man (nach §. 80.) die kleinste allen Nennern der gegebenenen Brüche meßbare Zahl, dividire alsdann diese mit jedem der gegebenen Nenner und multiplicire den, einem jeden Nenner zugehörigen, Zähler mit dem jedesmaligen Quotienten, so giebt das solchergestalt gefundene Product den neuen Zähler eines jeden Bruchs, die zuerst gefundene Zahl aber ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner aller gegebenen Brüche. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus folgenden Gründen:

Die kleinste allen Nennern der gegebenen Brüche meßbare Zahl ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche. Dividirt man diesen mit jedem der gegebenen Nenner, so findet man zum Quotienten eben die Zahl, womit der gegebene Nenner multiplicirt werden mußte, um ihn zum kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu machen. Multiplicirt man also mit dem gefundenen Quotienten den, solchem Nenner zugehörigen, Zähler, so wird der Bruch im Zähler und Nenner gleichviel vergrößert, folglich (nach §. 19. Nro III.) ohne Veränderung seines Werths auf einen andern Ausdruck gebracht; und da der Nenner dieses neuen Bruchs die kleinste allen Nennern der gegebenen Brüche meßbare Zahl ist, so ist er auch ihr kleinster gemeinschaftlicher Nenner.

Z. B. es sollen folgende Brüche $\frac{33}{184}$, $\frac{41}{360}$, $\frac{55}{456}$, $\frac{77}{402}$ auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden, so stehet die Rechnung also:

184, 360, 402, 456

größtes gemeines Maaß der beyden 184 und 360 = 8.

184) 360 ⌋ 2
184⌊
176) 184 ⌋ 1
176⌊
8) 176 ⌋ 22⌊

8) 184 ⌋ 23⌊

360
23
1080
720
8280 = kleinste meßbare Zahl von 184 und 360.

größtes gemeines Maaß der beyden 402 und 8280 = 6.

402) 8280 ⌋ 20
804⌊
240) 402 ⌋ 1
240⌊
162) 240 ⌋ 1
162⌊
78) 162 ⌋ 2
156⌊
6) 78 ⌋ 13⌊

6) 402 ⌋ 67⌊

8280
67
5796
4968
554760 = kleinste meßbare Zahl von 402 und 8280.

456) 554760 (1216
456

987
912

756
456

3000
2736
---
264) 456 (1
264
---
192) 264 (1
192
---
72) 192 (2
144
---
48) 72 (1
48
---
24) 48 (2
48
---

größtes gemeines Maaß der beyden 456 und 554760 = 24.

24) 456 (19
24

216
216

554760
19

499284
55476

10540440 = kleinste meßbare Zahl von 456 und 554760 und folglich von allen gegebenen Nennern.

Erstes Beyspiel.

Gegebene Brüche.	$\frac{33}{184}$,	$\frac{41}{360}$,	$\frac{55}{456}$,	$\frac{77}{402}$
Quotienten.	57285,	29279,	23115,	26220
Neue Zähler.	1893485,	1200439,	1271325,	2018940
Kleinster Nenner.	10540440			

Zweytes Beyspiel.

Gegebene Brüche.	$\frac{5}{11}$,	$\frac{11}{27}$,	$\frac{13}{63}$
Quotienten.	9,	7,	3
Neue Zähler.	45,	77,	39
Kleinster Nenner.	189		

Drittes Beyspiel.

Gegebene Brüche.	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{6}{7}$,	$\frac{7}{9}$,	$\frac{5}{8}$
Quotienten.	168,	126,	42,	72,	56,	63
Neue Zähler.	336,	378,	210,	432,	392,	315
Kleinster Nenner.	504					

Siebenter Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen.

§. 83.

Gleich zu Anfang dieser Arithmetik (in §. 4.) wurde als eine Folge des im vorhergehenden §. 3. vorgetragenen arithmetischen Grundgesezes angegeben, daß in einer Zahlenreihe von der rechten gegen die linke Hand zu gerechnet jede Ziffer in jeder nachfolgenden Stelle einen zehnmal größeren Werth habe, als in der vorhergehenden. Hieraus folgt nun umgekehrt, daß, von der linken Hand gegen die rechte gerechnet, jede Ziffer, in jeder nachfolgenden Stelle einen zehnmal kleinern Werth haben müsse, als in der vorhergehenden. Hat man daher eine Zahlenreihe, deren lezte Ziffer bey der rechten Hand einfache Einheiten bedeutet, wie z. B. 629784, so müssen, wenn man diese Reihe, nachdem man zuvor die Stelle der einfachen Einheiten durch irgend ein beliebiges Zeichen, etwa durch ein Comma, bezeichnet hat, gegen die rechte Hand zu fortsezt, indem man ihr noch die Ziffern 1356 anhängt, so daß nun die ganze Reihe ist: 629874,1356 vermöge eben dieses Gesezes in der ersten Stelle nach den einfachen Einheiten gegen die rechte Hand zu, Zehntheile der einfachen Einheiten, in der zweyten Zehntheile von diesen Zehntheilen oder Hunderttheile der einfachen Einheiten, in der dritten Zehntheile von diesen Hunderttheilen, oder Tausendtheile der einfachen Einheiten, in der vierten Zehntheile von diesen Tausendtheilen oder Zehntausendtheile der einfachen Einheiten u. s. w.

stehen. Die nach der Stelle der einfachen Einheiten gegen die rechte Hand zu folgenden Stellen, sind also Stellen der niedrigerern Ordnungen, so wie die nach derselben gegen die linke Hand zu folgenden, Stellen der höheren Ordnungen sind, und namentlich ist die erste Stelle nach der Stelle der einfachen Einheiten gegen die rechte Hand zu die Stelle der ersten, die zweyte die Stelle der zweyten, die dritte die Stelle der dritten, u. s. w. niedrigeren Ordnung; die in diesen Stellen stehenden Ziffern aber sind Zähler von Brüchen, deren Nenner von einer Ordnung sind, die unter den höheren Ordnungen die ebensovielste ist, als die Ordnung dieser Ziffern selbst unter den niedrigern. So ist in dem vorgegebenen Beyspiele die Ziffer 1 von der ersten niedrigeren Ordnung, ihr Nenner aber eine Einheit der ersten höheren nämlich 10, die folgende Ziffer 3 ist von der zweyten niedrigeren Ordnung, ihr Nenner hingegen von der zweyten höheren nämlich 100 u. s. w. Demnach bekommt der Nenner einer jeden nachfolgenden Ziffer eine Nulle mehr als der Nenner der vorhergehenden, weil die Ordnungen der Nenner in eben dem Verhältnisse wachsen, wie die Ordnungen der angehängten Ziffern selbst abnehmen. Und daher machen alle diese Ziffern zusammen den Zähler eines Bruchs aus, dessen Nenner die Einheit mit so viel angehängten Nullen ist, als die Anzahl dieser Ziffern beträgt. Um sich hievon zu überzeugen, darf man nur alle diese Brüche, nämlich $\frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000}$ nach den gewöhnlichen Regeln auf einerley Benennung bringen, und addiren, wo man dann finden wird, daß ihre Summe $\frac{13756}{100000}$ ist. Diesem zur Folge können diese Brüche auch auf zweyerley Art gelesen werden, nämlich entweder: Ein Zehntel, drey Hunderttel, fünf Tausendtel und sechs Zehntausendtel, oder: Ein Tausend, drey Hundert, sechs und fünfzig Zehntausendtel. Weil man solchergestalt bey diesen Brüchen den Nenner unmittelbar aus dem Zähler bestimmen, oder dem Zähler sogleich ansehen kann, so kann man bey denselben der Mühe, ihnen die Nenner unterzuschreiben, durchgängig überhoben seyn. Hieraus folgt nun zunächst, daß man diese Brüche bey allen Rechnungen wie ganze Zahlen ansehen und behandeln könne, und dies ist der erste Hauptvortheil, der ihren Gebrauch so ungemein

bequem macht. Weil die Nenner dieser Brüche allemal die Zahl 10, oder Producte von ihr durch sie selbst, das heißt Potenzen der Zahl 10 sind, so hat man sie zehntheilige Brüche oder Decimalbrüche genannt.

§. 84.

Will man eine Reihe von bloßen Decimalbrüchen, ohne eine ganze Zahl von irgend einer Ordnung schreiben, so wird bloß an die Stelle der einfachen Einheiten eine Nulle gesezt. So heißt z. B. 0,7 sieben Zehntel; 0,21 Ein und zwanzig Hunderttheile, oder zwey Zehntel und ein Hunderttel. Einer solchen Reihe sowohl, als auch einer, die aus ganzen Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen bestehet, kann man, sobald der Ort der einfachen Einheiten einmal bestimmt ist, alsdann zu beyden Seiten noch so viele Nullen anhängen, als man will, ohne den Werth dieser Reihe im geringsten zu verändern. So ist z. B. 000,56400 nicht mehr und nicht weniger als 0,564. Eben so ist 00,37000000 = 0,37 u. s. w.

Daß der Werth einer Zahlenreihe, durch die vorne oder linker Hand angehängten Nullen nicht geändert werde, erhellet daraus, weil die Nullen am Anfang einer Zahlenreihe bloß dienen, um anzuzeigen, daß von der Ordnung, welche den Stellen, die sie einnehmen, zugehört, keine Ziffern vorhanden seyen. Sind aber von einigen der höheren Ordnungen keine Ziffern vorhanden, so fängt man auch erst von der Stelle, worin die erste Ziffer stehet, die Zahlenreihe zu lesen, und ihren Werth zu schäzen an, und nimmt also auf die vorangesezten Nullen so wenig Rücksicht, als ob sie gar nicht da wären. Z. B. bey der Reihe 003,85 hat man nicht nöthig zu lesen: kein Hunderter, kein Zehner, drey Einheiten, acht Zehntel und fünf Hunderttel, sondern da es ganz überflüssig wäre, auf das Nichtvorhandenseyn der Ziffern von diesen höheren Ordnungen die Aufmerksamkeit zu richten, so kann man geradezu lesen: drey Ganze und fünf und achtzig Hundertel.

Daß aber der Werth einer Zahlenreihe, die sich in Decimalbrüche endigt, auch durch die hinten, oder

rechter Hand, angehängten Nullen nicht verändert werde, kann man folgendermaßen erweisen. Die hinten angehängten Nullen sind Decimalziffern; nun bekommt (nach dem vorigen §.) der Nenner einer jeden nachfolgenden Decimalziffer eine Nulle mehr, als der Nenner der vorhergehenden, und mithin der Nenner des ganzen Bruchs, dessen Zähler aus den aufänglich vorhandenen Decimalziffern und den angehängten Nullen bestehet, so viel Nullen mehr, wie der Nenner des Bruchs, dessen Zähler bloß aus den anfänglich vorhandenen Decimalziffern bestehet, als man diesen Ziffern selbst Nullen angehängt hat. Folglich wird durch das Anhängen der Nullen der Bruch eigentlich im Zähler und Nenner mit einerley Zahl nämlich mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, und bleibt also (nach §. 19. Nro III.) unverändert. Gesezt z. B. man hätte die Reihe 1,365, und wollte derselben am Ende noch vier Nullen anhängen, daß sie also würde 1,3650000; so wäre nunmehr der Nenner des Bruchs, dessen Zähler diese Reihe von Decimalziffern ist, (nach dem vorigen §.) die Einheit mit sieben Nullen, oder = 10000000, da hingegen der Nenner des Bruchs, dessen Zähler eben diese Reihe von Decimalziffern, vor Anhängung der Nullen, nämlich 365, ist, die Einheit mit nicht mehr als drey Nullen oder 1000 ist; folglich wird durch das Anhängen der vier Nullen dieser Bruch eigentlich im Zähler und Nenner mit 10000 multiplicirt und bleibt daher unverändert.

§. 85.

Für die Addition und Subtraction der Decimalbrüche gelten die oben (§. 5. und 6.) für eben diese Rechnungsarten in ganzen Zahlen gegebenen Vorschriften und Beweise ohne einige Veränderung. Wegen der Subtraction ist nur das einzige zu erinnern, daß, wenn der Minuendus weniger Decimalziffern als der Subtrahendus, oder wenn er deren gar keine hat, da doch bey dem lezteren sich welche befinden, man, um die Subtraction zu verrichten, dem ersteren (nach dem vorigen §.) so viele Nullen rechter Hand anhängen kann, bis er mit dem lezteren gleich viele Decimalziffern hat.

Mehr zur Probe, als zum Beweis der Richtigkeit des gebrauchten Verfahrens (denn dieser ist, wie gesagt, der nämliche wie bey den ganzen Zahlen) kann man nach geendigter Rechnung die gegebenen Decimalbrüche, durch wirkliche Unterſezung ihrer Nenner, in gemeine Brüche verwandeln, und mit ihnen (nach §. 23.) die Rechnung vornehmen, wo man dann, wofern man das erſtemal richtig gerechnet hat, wieder die nämlichen Reſultate bekommen muß:

Beyſpiele der Addition.

789,15	1076,45	57,07	5904,82
348,27	904,08	3008,9	800,007
572,51	7009,006	806,005	17,9
1709,93	50,06	954,06	6008,125
	9039,606	4826,035	12730,852

Probe der Addition.

I. Werden die gegebenen Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt.

$$5904,82 = \frac{590482}{100}$$

$$800,007 = \frac{800007}{1000}$$

$$17,9 = \frac{179}{10}$$

$$6008,152 = \frac{6008152}{1000}$$

II. Nun hat man vier Brüche von verſchiedenen Nennern; ſollen alſo dieſe addirt werden, ſo müſſen ſie vorher auf einerley Benennung gebracht werden. Zu dem Ende muß man den erſten mit 10 und den dritten mit 100 im Zähler und Nenner imultipliciren, wodurch ſich alſo dieſe Brüche in folgende verwandeln.

$$\frac{5904820}{1000}$$

$$\frac{800007}{1000}$$

$$\frac{17900}{1000}$$

$$\frac{6008125}{1000}$$

III. Da sie nunmehr alle einerley Nenner haben, so addirt man ihre Zähler, und sezt der Summe derselben den gemeinschaftlichen Nenner unter, wodurch man erhält:

$$\frac{\begin{array}{r}5904820\\800007\\17900\\6008125\end{array}}{\begin{array}{r}12730852\\1000\end{array}}$$

IV. Verrichtet man nun bey diesem lezten Ausdruck die Division wirklich, so erhält man zum Quotienten:

$$12730\frac{852}{1000} = 12730{,}852.$$

Beyspiele der Subtraction.

641,02	8201,03	87,100000	543,010000
584,27	5794,68	69,754328	98,795463
56,75	2406,35	17,345672	444,214537

Probe der Subtraction.

$543{,}01 = \frac{543010000}{1000000}$ $\quad \frac{\begin{array}{r}543010000\\98795463\end{array}}{444214537}$

$98{,}795463 = \frac{98795463}{1000000}$ $\quad \frac{444214537}{1000000} = 444{,}214537$

§. 86.

Was die Multiplication mit Decimalbrüchen betrifft, so mögen folgende Betrachtungen zu Bewirkung einer deutlichen Einsicht in die Gründe derselben dienen. Einmal folgt (aus §. 51.), daß eine jede Zahl zehenmal größer gemacht, oder daß sie mit zehen multiplicirt werde, wenn man ihr am Ende eine Nulle anhängt; denn dadurch werden aus den Einheiten derselben Zehner, aus den Zehnern Hunderter, aus den Hundertern Tausender u. s. w., kurz, es wird dadurch jede Ziffer dieser Zahl von jeder Ordnung in die nächsthöhere Ordnung erhoben, oder es werden alle

Theile dieser Zahl zehnmal größer, folglich wird es auch die ganze Zahl. Aus eben den Gründen wird eine Zahl hundertmal größer, als sie war, wenn man ihr zwey Nullen, tausendmal, wenn man ihr drey Nullen am Ende ansezt u. s. w. Z. B. 750 ist zehnmal größer, als 75, und 7500 ist hundertmal größer, als 75 u. s. w. Was nun bey einer Zahl, die bloß aus einfachen Einheiten und Einheiten höherer Ordnungen bestehet, durch das Anhängen der Nullen bewirkt wird, eben das wird bey einer Zahl, welche nach den einfachen Einheiten noch eine Reihe Decimalziffern bey sich führt, durch Versezung des Decimalzeichens nach der rechten Hand zu bewirkt. Wird nämlich bey einer solchen Zahl das Komma um eine Stelle gegen die rechte Hand zu gerückt, so wird dadurch die Ziffer, hinter welche es nun zu stehen kommt, aus der Stelle der Einheiten der ersten niedrigeren Ordnung, in welcher sie vorher stand, in der Stelle der einfachen Einheiten versezt; diejenige also, die vorher in dieser Stelle stand, rückt nunmehr in die Stelle der Zehner, diejenige, welche vorher diese Stelle eingenommen hatte, in die Stelle der Hunderter, die in der Stelle der Hunderter befindliche, in die Stelle der Tausender, u. s. w. vor. Folglich wird auf diese Weise die ganze Zahl zehnmal größer, als sie vorher war, oder sie wird durch Zehn multiplicirt. Aus eben den Gründen wird eine Zahl durch Hundert multiplicirt, wenn in derselben das Komma um zwey Stellen, durch Tausend, wenn es um drey Stellen gegen die rechte Hand zu gerückt wird u. s. f. Hieraus folgt umgekehrt, daß man, um eine Zahl zehnmal kleiner zu machen, nur das Komma um eine Stelle nach der linken Hand zu rücken dürfe; denn dadurch wird die Ziffer, die vorher in der Stelle der einfachen Einheiten stand, in die Stelle der ersten niedrigeren Ordnung herabgesezt, und an ihre Stelle rücken nun die vorigen Zehner, an die Stelle dieser, die vorigen Hunderter u. s. f. durch die ganze Reihe. Aus eben den Gründen muß das Decimalzeichen um zwey Stellen, wenn eine Zahl hundertmal um drey Stellen wenn sie tausendmal kleiner gemacht werden soll, gegen die linke Hand zu gerückt werden u. s. w. Z. B.

				9,8756423
10	mal	größer		98,756423
100	=	=	=	987,56423
1000	=	=	=	9875,6423
10000	=	=	=	98756,423
100000	=	=	=	987564,23
1000000	=	=	=	9875642,3
10000000	=	=	=	98756423

				2837951,4
10	mal	kleiner		283795,14
100	=	=	=	28379,514
1000	=	=	=	2837,9514
10000	=	=	=	283,79514
100000	=	=	=	28,3 9514
1000000	=	=	=	2,8379514
10000000	=	=	=	0,28379514

§. 87.

Es sey nun die Zahl 645,8 zu multipliciren durch 123,542, so seze man für die lezte Ziffer 2 des Multiplicators, welche Tausendtheile bedeutet, den Multiplicandus tausendmal verkleinert, zweymal, für die nächstvorhergehende Ziffer 4 des Multiplicators, welche Hunderttheile bedeutet, seze man den Multiplicandus hundertmal verkleinert, viermal, für die Ziffer 5 des Multiplicators, welche Zehntheile bedeutet, seze man den Multiplicandus, zehnmal verkleinert, fünfmal; nun seze man für die drey Einheiten des Multiplicators den Multipliplicandus einfach, so wie er ist, dreymal, für die zwey Zehner des Multiplicators seze man ihn zehnmal vergrößert, zweymal, und endlich noch für den einen Hunderter des Multiplicators hundertmal vergrößert, einmal. Die solchergestalt genau untereinander geschriebenen Zahlen addire man alsdann, so wird die Summe das gesuchte Product seyn. Die Rechnung selbst stehet also:

A { 0,6458 / 0,6458 } = = = = = 1,2916

B { 6,458. / 6,458. / 6,458. / 6,458. } = = = = 25,832.

C { 64,58.. / 64,58.. / 64,58.. / 64,58.. / 64,58.. } = = = = 322,90..

D { 645,8... / 645,8... / 645,8... } = = = 1937,4...

E { 6458,.... / 6458,.... } = = 12916 ....

F $\frac{6458.,....}{79783,4236}$ = = $\frac{6458.....}{79783,4236}$

Nach §. 8. heißt nämlich eine Zahl mit einer andern multipliciren, nichts anders, als eine Zahl so vielmal wiederholt nehmen, als die andere verlangt. Nun fordert im gegenwärtigen Falle der Multiplicator, daß man den Multiplicandus hundertmal vergrößert einmal, zehnmal vergrößert zweymal, alsdann daß man ihn selbst einfach dreymal, ferner daß man ihn zehnmal verkleinert, oder ein Zehntel von ihm, fünfmal, daß man ihn hundertmal verkleinert, oder ein Hunderttel von ihm viermal, endlich daß man ihn tausendmal verkleinert, oder ein Tausendtel von ihm zweymal nehmen solle. Nun hat man

das Hundertfache des Multiplicandus	bey F	1mal
das Zehnfache = = =	bey E	2mal
den Multiplicandus selbst . .	bey D	3mal
$\frac{1}{10}$ des Multiplicandus . .	bey C	5mal
$\frac{1}{100}$ = = = = . .	bey B	4mal
$\frac{1}{1000}$ = = = = . .	bey A	2mal

folglich muß die Summe aller dieser Zahlen den Multiplicandus so vielmal wiederholt enthalten, als der

Multiplicator verlangt, und mithin (nach §. 8.) dem Producte dieser beyden Zahlen gleich seyn. Eben weil nun dieses Product der Summe der untereinander gesezten Zahlen gleich ist, so kann hier so wenig die Frage entstehen, wohin man in demselben das Decimalzeichen sezen müsse, als man bey der in §. 85. gefundenen Summe zu dieser Frage Veranlassung finden konnte. Denn da in einem Falle, wie im andern, lauter Ziffern von gleichen Ordnungen untereinander gesezt und zusammengezählt worden sind, so kann auch in der Summe einer jeden einzelnen Reihe keine Ziffer von einer andern Ordnung vorkommen, als eben von der, zu welcher alle in dieser Reihe stehenden Ziffern gehören, weil wenn bey dem Zusammenzählen einmal die Summe einer einzelnen Reihe so groß wird, daß in derselben eine Ziffer von einer höheren Ordnung, als die Ordnung dieser Reihe ist, vorkommt, diese, nach den gewöhnlichen Regeln, zu der folgenden nächsthöheren Reihe übergetragen wird.

§. 88.

Wenn man dieses Verfahren mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so wird man bald bemerken, daß man sich die Addition dieser Ziffern dadurch sehr erleichtern könnte, daß man zuerst die Partialsummen der bey A, B, C, u. s. w. stehenden Zahlen, so wie man sie nach Anzeige der Ziffern des Multiplicators hingeschrieben hat, suchte, und alsdann alle diese Partialsummen in eine Summe zusammenzöge. Wenn man nun diese Partialsummen genauer ansieht, so zeigt es sich, daß sie nichts anders seyen, als die Producte der einzelnen Theile des Multiplicators in den Multiplicandus, wie man sie gefunden haben würde, wenn man beyde nach eben den Regeln, welchen man bey der Multiplication ganzer Zahlen folgt, in einander multiplicirt hätte; welches auch schon aus dem oben (§. 8.) zum Grunde gelegten Begriffe von der Multiplication fließt. Und hieraus folgt dann nun weiter, daß man auch bey der Multiplication die Decimalbrüche völlig wie ganze Zahlen behandeln könne. Da aber auf diese Weise in den Partialproducten nicht mehr wie vorhin in den Partialsummmen, Einheiten von einerley Ordnung untereinander zu stehen kommen, so

entstehet nun die Frage: Wie man am Ende in dem Producte den Ort des Decimalzeichens bestimmen könne?

§. 89.

Wegen der Beantwortung dieser Frage wird man nicht lange verlegen seyn können, wenn man nur das Beyspiel des §. 87. aufmerksam betrachtet. In demselben war der Multiplicandus 645,8 und der Multiplicator 123,542. Um die Multiplication gehörig zu verrichten, mußte man zuerst den tausendsten Theil des Multiplicandus nehmen, welcher dadurch hervorgebracht wurde, daß man in jenem das Decimalzeichen um drey Stellen weiter gegen die linke Hand zu vorrückte, so daß er folgende Gestalt bekam: 0,6458. Nach dieser Veränderung stehen also in dieser Zahl so viele Ziffern mehr hinter dem Decimalzeichen, als vorher in ihr hinter demselben gestanden hatten, wie viele Ziffern in dem Multiplicator hinter dem Decimalzeichen stehen; in dem Multiplicandus (645,8) stand nämlich vorher nur eine Ziffer hinter dem Decimalzeichen, in dem Multiplicator (123,542) aber befanden sich ihrer drey daselbst, und in der solchergestalt herausgebrachten Zahl (0,6458) stehen nun drey mehr als eine, das heißt vier Ziffern, hinter dem Decimalzeichen. Nun wird man bey fortgesetztem Nachdenken leicht einsehen, daß allemal, wenn man nach der Anweisung des §. 87. multiplicirt, in der ersten solchergestalt heraus gebrachten Zahl, welche immer das Product aus dem niedrigsten Theile des Multiplicators in den Multiplicandus ist (im vorigen Beyspiele 0,6458) nach dem Decimalzeichen so viele Ziffern zu stehen kommen müssen, als ihrer in beyden Factoren zusammen hinter demselben stehen, weil bey der nach Maaßgabe der Decimalziffern des Multiplicators vorzunehmenden Verkleinerung des Multiplicandus, welche durch das Vorrücken des Decimalzeichens in demselben nach der linken Hand zu bewirkt wird, nicht nur die in dem Multiplicandus vorher befindlich gewesenen Decimalziffern als solche abgeschnitten bleiben, soudern zu diesen noch so viele neue hinzukommen, als der Multiplicator enthält. Wie viele Ziffern aber in der solchergestalt zuerst heraus gebrachten Zahl hinter dem Decimalzeichen stehen, eben so viele stehen auch in dem Producte hinter

demselben, weil keins der nachfolgenden Partialproducte Ziffern von einer niedrigeren Ordnung, als die zuerst heraus gebrachte Zahl, enthalten kann, wie aus der Rechnung und dem Beweis (des §. 87.) erhellet. Demnach folgen in dem Producte jedesmal so viele Decimalzeichen gegen die rechte Hand zu, als in beyden Factoren zusammen nach demselbigen stehen. Da man nun (nach dem vorigen §.) eben die Producte erhält, wenn man die Decimalbrüche bey der Multiplication völlig wie ganze Zahlen behandelt, welche sich ergeben, wenn man dabey das (in §. 87.) angewiesene Verfahren beobachtet, so folgt, daß die so eben gefundene Regel zur Bestimmung des Orts des Decimalzeichens in den auf die leztere Art erhaltenen Producten, auch für die auf die erstere Art heraus gebrachten Producte gleichmäßig gelten müsse. Die obige Regel kann aber noch kürzer so ausgedrückt werden: Die Anzahl der Decimalziffern des Products ist jedesmal der Summe der Decimalziffern der Factoren gleich. Demnach braucht man sich bey der Multiplication der Decimalbrüche, erst wenn man das Product fertig hat, um den Ort des Decimalzeichens zu bekümmern, und kann solchen nach dieser Regel in allen Fällen ohne einigen Anstand bestimmen, ja vermittelst derselben auch schon voraus angeben, von welcher Ordnung die niedrigste Ziffer des Products seyn werde.

Beyspiele der Multiplication.

Es sey zu multipliciren 578,34 mit 3,412, so stehet die Rechnung also:

```
   578,34        { 0,57834 }
    3,412        { 0,57834 } = = = = 1,15668
  ---------
   115668          5,7834 . = = = = = 5,7834 .
    57834
  231336        { 57,834 .. }
 173502         { 57,834 .. }
               { 57,834 .. } = = = 231,336 ..
               { 57,834 .. }
  ---------
 1973,29608

               { 578,34 ... }
               { 578,34 ... } = = 1735,02 ...
               { 578,34 ... }
               ---------------   ---------------
                1973,29608        1973,29608
```

Probe davon.

$\frac{57834}{100} \times \frac{3412}{1000} = \frac{57834 \times 3412}{100 \times 1000} = \frac{197329608}{100000} = 1973{,}29608$

Es sey zu multipliciren 69,4537 mit 23,14.

69,4537
23,14
2778148
694537
2083611
1389074
1607,158618

$\left\{\begin{array}{l} 0{,}694537 \\ 0{,}694537 \\ 0{,}694537 \\ 0{,}694537 \end{array}\right\} = = = = 2{,}778148$

$6{,}94537 \cdot = = = = = 6{,}94537 \cdot$

$\left\{\begin{array}{l} 69{,}4537 \cdot\cdot \\ 69{,}4537 \cdot\cdot \\ 69{,}4537 \cdot\cdot \end{array}\right\} = = = 208{,}3611 \cdot\cdot$

$\left\{\begin{array}{l} 694{,}537 \cdot\cdot\cdot \\ 694{,}537 \cdot\cdot\cdot \end{array}\right\} = = 1389{,}074 \cdot\cdot\cdot$

1607,158618 — 1607,158618

Probe.

$\frac{694537}{10000} \times \frac{2314}{100} = \frac{694537 \times 2314}{10000 \times 100} = \frac{1607158618}{1000000} =$
1607,158618.

§. 90.

Wenn bey der Division die niedrigste Ziffer sowohl des Divisors als des Dividendus einfache Einheiten bedeutet, oder wenn Divisor und Dividendus beyde ganze Zahlen sind, so weiß man (aus §. 12. u. f.) daß alsdann auch die niedrigste Ziffer des Quotienten einfache Einheiten bedeute. So giebt z. B. 2236608 durch 352 dividirt, zum Quotienten 6354. Wenn man aber die Ordnung der Ziffern des Dividendus, oder des Divisors, oder beyder zugleich, durch Dazwischensezung des Decimalzeichens ändert, so kann man aus dem bisher Gesagten schon wissen, daß zwar die Ziffern des Quotienten selbst noch die nämlichen bleiben, ihre Ordnung aber dadurch nothwendig verändert werden müsse.

Gesezt nun, man sollte anstatt der Zahl 2236608 die Zahl 223660,8 durch 352 dividiren, so müßte, da

der leztere Dividendus zehnmal kleiner ist, als der erstere, (nach §. 18.) nun auch der Quotient zehnmal kleiner werden, oder es müßte in demselben nun auch eine Ziffer durch das Decimalzeichen von den einfachen Einheiten abgeschnitten werden, daß er nun wäre: 635,4. Eben so müßten, wenn man die Zahl 22366,08 noch durch eben denselben Divisor dividiren wollte, nun im Quotienten auch zwey Ziffern durch das Decimalzeichen von den einfachen Einheiten abgeschnitten werden, und derselbe seyn 63,54 u. s. f. Hieraus erhellet also, daß überhaupt das Decimalzeichen für jede Ziffer, um welche es im Dividendus gegen die linke Hand zu gerückt worden, im Quotienten allemal auch um eine Ziffer gegen die linke Hand zu müsse gerückt werden, und daß also, wenn der Divisor aus lauter ganzen Zahlen, der Dividendus aber aus ganzen Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen bestehet, im Quotienten allemal so viele Ziffern, durch das Decimalzeichen von den einfachen Einheiten abgeschnitten werden müssen, als ihrer im Dividendus davon abgeschnitten worden sind.

Wenn hingegen bey unverändertem Dividendus der Divisor zehnmal kleiner gemacht wird, so muß dadurch, vermöge des Gegensazes, (nach §. 18.) der Quotient zehnmal größer werden. Wenn man also in dem vorgegebenen Beyspiele die Zahl 2236608 nun durch 35,2 dividirt, so muß der Quotient seyn, 63540. Aus eben den Gründen muß der Quotient hundertmal grösser werden, wenn der Divisor hundertmal kleiner wird. Dividirt man also den vorigen Dividendus mit 3,52, so wird der Quotient seyn, 635400 u. s. w. Hieraus folgt also, daß das Decimalzeichen für jede Ziffer, um welche es im Divisor gegen die linke Hand zu versezt wird, im Quotienten allemal um eine Ziffer gegen die rechte Hand zu gerückt werden müsse, und daß mithin, wenn der Dividendus aus lauter ganzen Zahlen, der Divisor, aber aus ganzen Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen besteht, dem Quotienten allemal so viele Nullen angehängt werden müssen, als der Divisor Dezimalziffern enthält.

Aendert man endlich den Divisor und Dividendus zugleich, so daß man beyde durch Dazwischensezung des

Decimalzeichens kleiner macht, so müssen, den bisherigen Schlüssen zur Folge, diese beyden Veränderungen zusammen wirken, um eine Aenderung in dem Quotienten hervorzubringen, die eine, nämlich die Verkleinerung des Divisors, um ihn zu vergrößern, die andere hingegen, nämlich die Verkleinerung des Dividendus, um ihn zu verkleinern. Es kommt also nun bloß darauf an, ob diese beyden Veränderungen gleich viel betragen, oder wenn die eine mehr beträgt, als die andere, welche von beyden mehr, und welche weniger betrage. Wenn man z. B. die Zahl 223660,8 durch durch 32,2 dividirt, so betragen beyde Veränderungen gleich viel, der Quotient wird also durch die eine Veränderung um eben so viel vergrößert, um wie viel er durch die andere verkleinert wird, und bleibt folglich unverändert, das heißt, er bleibt derselbe, wie man ihn gefunden haben würde, wenn sowohl der Dividendus, als der Divisor, ganze Zahlen geblieben wären.

Dividirt man hingegen die Zahl 22366,08 durch 35,2, so wird durch die vorgegangene hundertmalige Verkleinerung des Dividendus auch der Quotient hundertmal verkleinert, durch die zehnmalige Verkleinerung des Divisors aber wird er zugleich zehnmal vergrößert, und folglich hebt diese zehnmalige Vergrößerung den zehnten Theil der, von der hundertmaligen Verkleinerung des Dividendus herrührenden, hundertmaligen Verkleinerung des Quotienten auf, und er wird also nur zehnmal verkleinert, und ist mithin 635,4.

Dividirt man endlich die Zahl 223660,8 durch 3,52, so wird durch die vorgegangene hundertmalige Verkleinerung des Divisors der Quotient hundertmal vergrößert; da er aber durch die zehnmalige Verkleinerung des Dividendus zugleich zehnmal verkleinert wird, so hebt diese zehnmalige Verkleinerung den zehnten Theil der, von der hundertmaligen Verkleinerung des Divisors herrührenden, hundertmaligen Vergrößerung des Quotienten auf, und er wird also nur zehnmal vergrößert, und ist mithin 63540; und so in allen übrigen Fällen.

Und hieraus ergiebt sich dann folgende allgemeine Regel für die Bestimmung des Orts des Decimalzei-

chens im Quotienten bey der Division mit Decimalbrüchen: Das Decimalzeichen muß von der lezten Ziffer des Quotienten jedesmal um so viele Stellen entfernt werden, als der Ueberschuß der Anzahl der Decimalziffern des Divisors über die Anzahl der Decimalziffern des Dividendus beträgt. Ist dieser Ueberschuß positiv, das heißt, enthält der Divisor wirklich mehr Decimalziffern, als der Dividendus, so muß die angezeigte Entfernung des Decimalzeichens von der lezten Ziffer des Quotienten gegen die rechte Hand zu geschehen, und da in diesem Falle keine Ziffern mehr nach dieser Gegend hin stehen, so müssen dem Quotienten zu dem Ende so viele Nullen angehängt werden, als der gedachte Ueberschuß beträgt. Ist hingegen dieser Ueberschuß negativ, das heißt, enthält der Dividendus mehr Decimalziffern, als der Divisor, so muß die angezeigte Verrückung des Decimalzeichens nach der linken Hand zu geschehen. Ist endlich dieser Ueberschuß $= 0$, das heißt, enthalten Divisor und Dividendus gleich viele Decimalziffern, so darf das Decimalzeichen von der lezten Ziffer des Quotienten um keine Stelle verrückt werden, und bleibt also unmittelbar hinter derselben stehen, das heißt, man erhält den Quotienten in ganzen Zahlen.

Die Art, wie wir diese Regel gefunden haben, enthält auch zugleich den Beweis ihrer Richtigkeit.

Beyspiele der Division mit Decimalbrüchen.

$$\frac{2236608}{352} = \frac{2236608}{10} : 352 = \frac{6354}{10} = 635{,}4$$

$$\frac{22366108}{352} = \frac{2236608}{100} : 352 = \frac{6354}{100} = 63{,}54$$

$$\frac{2236608}{352} = \frac{2236608}{1000} : 352 = \frac{6354}{1000} = 6{,}354$$

$$\frac{22366608}{352} = \frac{2236608}{10000} : 352 = \frac{6354}{10000} = 0{,}6354$$

$$\frac{22366608}{352} = \frac{2236608}{100000} : 352 = \frac{6354}{100000} = 0{,}06354$$

$$\frac{2236608}{352} = \frac{2236608}{1000000} : 352 = \frac{6354}{1000000} = 0{,}006354$$

$$\frac{02236608}{352} = \frac{2236608}{10000000} : 352 = \frac{6354}{10000000} = 0{,}0006354$$

$\frac{2236608}{3512} = \frac{2236608}{352} = \frac{2236608}{352} \times 10 = 6354 \times 10$
$= 63540$

$\frac{2236608}{3152} = \frac{2236608}{352} = \frac{2236608}{352} \times 100 = 6354 \times 100$
$= 635400$

$\frac{2236608}{01352} = \frac{2236608}{352} = \frac{2236608}{352} \times 1000 = 6354 \times 1000$
$= 6354000$

$\frac{22366018}{3512} = \frac{2236608}{10} : \frac{352}{10} = \frac{2236608}{10} \times \frac{10}{352} =$
$\frac{2236608}{352} = 6354$

$\frac{22366108}{3512} = \frac{2236608}{100} : \frac{352}{10} = \frac{2236608}{100} \times \frac{10}{352} =$
$\frac{2236608}{3520} = 635,4$

$\frac{22361608}{3512} = \frac{2236608}{1000} : \frac{352}{10} = \frac{2236608}{1000} \times \frac{10}{352} =$
$\frac{2236608}{35200} = 63,54$

$\frac{223166608}{3152} = \frac{2236608}{10000} : \frac{352}{100} = \frac{2236608}{10000} \times \frac{100}{352} =$
$\frac{223660800}{3520000} = 63,54$

$\frac{22366018}{35210} = \frac{2236608}{10} : \frac{352}{1000} = \frac{2236608}{10} \times \frac{1000}{352} =$
$\frac{2236608000}{3520} = 635400$

$\frac{22366108}{01352} = \frac{2236608}{100} : \frac{352}{1000} = \frac{2236608}{100} \times \frac{1000}{352} :$
$\frac{2236608000}{35200} = 63540.$

§. 91.

Wenn bey der Division mit Decimalbrüchen am Ende ein Rest bleibt, so kann dieser zwar in den meisten Fällen, seines geringen Werths wegen, ganz ausser Acht gelassen werden. Jedoch wenn man Ursache hat, die Rechnung bis auf die äusserste Schärfe zu treiben, und daher auch solchen Rest noch mitzunehmen, so kommt es darauf an, zu wissen, was für eine Bedeutung er habe? Auf diese Frage ist nun die allgemeine Antwort, welche alle Fälle unter sich begreift, folgende: bey jeder Division bezieht sich der Rest, welcher mit dem untergeschriebenen Divisor dem Quotienten

6,54)9078,26(1388$\frac{74}{654}$
654
2538
1962
5762
5232
5306
5232
74

Probe davon.

$\frac{9078{,}26}{6{,}54} = \frac{907826}{100} : \frac{654}{100} = \frac{907826}{100} \times \frac{100}{654} =$
$\frac{907826}{1} \times \frac{1}{654} = \frac{907826}{654} = 1388\frac{74}{654}$

7,39)3,9807645320(0,5386690$\frac{622}{7390000000}$
3695
2857
2217
6406
5912
4944
4434
5105
4434
6713
6651
622

Probe davon.

$\frac{3{,}9807645320}{7{,}39} = \frac{39807645320}{1000000000} : \frac{739}{100} =$
$\frac{39807645320}{1000000000} \times \frac{100}{739} = \frac{39807645320}{10000000} \times \frac{1}{739} =$
$\frac{39807645320}{10000000} = 5386690\frac{622}{739} =$
$0{,}5386690\frac{622}{7390000000}$

§. 92.

Dem eben gezeigten Verfahren, bey der Division mit Decimalbrüchen den am Ende übrigbleibenden Rest dem Quotienten anzuhängen, ist dasjenige weit vorzuziehen, nach welchem man auch diesen Rest noch in Decimalziffern ausdrückt. Da man nämlich (nach §. 90.) aus der Vergleichung der Anzahl der Decimalziffern des Divisors und des Dividendus jedesmal voraus bestimmen kann, von welcher Ordnung die lezte Ziffer des Quotienten seyn werde, so kann man hieraus allemal auch zugleich beurtheilen, ob man, nach Maaßgabe der Absicht und des Gegenstandes der Rechnung, mit der Genauigkeit, die der Quotient, ohne den am Ende übrigbleibenden Rest giebt, sich begnügen könne, oder ob man durch Vernachläßignng des lezteren

0,9) 87,5046197,227333
81
65
63
20
18
24
18
66
63
30
27
30
27
30
27
3

§. 93.

Betrachtet man den bey der Division mit Decimalbrüchen übrig gebliebenen Rest, von welchem im vorigen §. gezeigt worden ist, wie man ihn in Decimalbrüchen ausdrücken könne, ausser seiner Verbindung mit dem Dividendus, von welchem er herrührt, bloß als einen gemeinen Bruch, so sieht man, daß in dem angezeigten Verfahren, denselben in Decimalbrüchen auszudrücken, zugleich auch die Auflösung der Aufgabe: einen gemeinen ächten Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, enthalten seye. In der That verfährt man auch dabey völlig auf die nämliche Art, nur daß man hier im Quotienten, weil noch gar keine Ziffern in demselben vorhanden sind, und der Divisor in dem Dividendus auch nicht einmal enthalten ist, gleich Anfangs an die Stelle der einfachen Einheiten eine Nulle, und hinter dieser das Decimalzeichen sezt, sodann aber die übrigen Ziffern, wie sie sich nach Anhängung der Nullen durch die Division nach einander ergeben, nachfolgen läßt. Daß man eben dieses Verfahrens auch dann, wenn man einen unächten Bruch

in Decimalbrüchen ausdrücken solle, sich bedienen, und die vermittelst der, nach Anhängung der Nullen fortgesezten, Division gefundenen Ziffern dem Quotienten, nachdem man zuvor in demselben hinter der Stelle der einfachen Einheiten das Decimalzeichen gesezt, geradehin in einem fort anhängen könne, fällt von selbst in die Augen. Und bey dieser Art, einem Quotienten den bey der Division übrig bleibenden Rest anzuhängen, oder einen Bruch auszudrücken, hat man es als den wichtigsten Vortheil anzusehen, daß man sich der Wahrheit, so sehr als man nur will, nähern kann; denn man kann dadurch den Quotienten jedesmal so genau erhalten als man immer will, so daß man zulezt um kein Milliontheilchen, oder, wenn man will, um keine Einheit von einer noch niedrigern Ordnung fehlt, ein Fehler, der nicht mehr bedeutet als gar keiner, da man doch in der Anwendung, auch bey Dingen, die noch die meiste Genauigkeit fordern und verstatten, nur selten bis auf solche Kleinigkeiten, und niemals über sie hinaus gehen kann.

Beyspiele.

$\frac{7}{8} = 0{,}875$

8) 70 | 0,875
64
60
56
40
40
0

$\frac{15}{21} = 0{,}7142857$

21) 150 | 0,7142857
147
30
21
90
84
60
42
180
168
120
105
150
147
3

$\frac{57}{31} = 1{,}8387096$

```
31) 57|1,8387096
    31
    ---
    260
    248
    ----
    120
     93
    ---
    270
    248
    ----
    220
    217
    ---
     300
     279
     ---
      210
      186
      ---
       24
```

Achter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubikzahlen, und der Ausziehung ihrer Wurzeln.

§. 94.

Die Lehre von den stetigen geometrischen Proportionen führte uns oben (in §. 47.) auf die Begriffe von den Quadratzahlen und ihren Wurzeln, welche auch daselbst schon vorläufig erklärt worden sind. Hier kommen wir nun zu der, an gedachtem Orte versprocheuen, ausführlicheren Betrachtung derselben. Zuvorderst haben wir zur Erklärung der in dieser Lehre üblichen Sprache zu bemerken, daß überhaupt ein Product, das aus lauter gleichen Factoren bestehet, eine Potenz oder Dignität des Factors, der etlichemal in sich selbst multiplicirt wird, uud ein solcher Factor die Wurzel der Potenz genannt werde. Die Anzahl der Factoren, durch deren Multiplication in einander eine Potenz entstehet, bestimmt den Grad derselben, welcher durch eine kleinere Ziffer, die man der Wurzel rechter Hand oben beysezt, bezeichnet wird; diese kleinere Ziffer heißt der Exponent der Potenz. Die zweyte, dritte und vierte Potenz haben ausserdem noch die eigenen Namen Quadrat, Cubus, Biquadrat, die übrigen aber werden bloß nach ihren Graden benannt. Demnach werden folgende Ausdrücke also gelesen:

5^2 das Quadrat oder die zweyte Potenz von 5
7^3 der Cubus oder die dritte Potenz von 7
9^4 das Biquadrat oder die vierte Potenz von 9
$\overline{15}^8$ die achte Potenz von 15.

Das Zeichen der Wurzel ist $\surd$, in dessen Oeffnung die Exponenten der Grade der Wurzeln eingeschrieben werden. Wenn aber dieses Zeichen ohne eine Ziffer stehet, so wird jedesmal die Quadratwurzel dadurch angedeutet. Demnach werden folgende Ausdrücke also gelesen:

$\sqrt[2]{81}$ die Wurzel der zweyten Potenz oder die Quadratwurzel von 81

$\sqrt[3]{648}$ die Wurzel der dritten Potenz oder die Cubikwurzel von 648

$\sqrt[4]{264}$ die Wurzel der vierten Potenz oder die Biquadratwurzel von 264

$\sqrt[5]{243}$ die Wurzel der fünften Potenz von 243.

§. 95.

Bey den Quadratzahlen, die wir zuerst betrachten, kömmt es vornämlich auf die Auflösung von zwey Aufgaben an; die eine ist: jede vorgegebene Zahl in das Quadrat zu erheben, oder die Quadratzahl jeder vorgegebenen Zahl zu finden; die andere: aus jeder vorgegebenen Zahl, die man als ein Quadrat betrachtet, die Wurzel auszuziehen. Daß die Auflösung der ersteren Aufgabe durch bloße Multiplication der vorgegebenen Zahl in sich selbst, bewerkstelliget werde, fließt aus dem allgemeinen Begriffe einer Potenz, und dem besondern einer Quadratzahl, wie solche im vorigen §. und oben in §. 47. angegeben worden sind. Hingegen mit der Auflösung der andern Aufgabe gehet es so leicht nicht. Von dem Saze, daß man, wenn man ein Product mit dem einen seiner Factoren dividirt, zum Quotienten den andern Factor erhalte, kann man hier, da zwar ein Product, aber keiner von dessen

Factoren gegeben ist, keine Anwendung machen, wofern man sich nicht entschliessen will, ein gegebenes Quadrat durch eine Zahl nach der andern so lange zu dividiren, bis man endlich, wer weiß nach wie viel vergeblichen Versuchen? auf eine käme, welche einen Quotienten gäbe, der dem angenommenen Divisor gleich wäre. Aber wer sieht nicht, daß dies eine unermeßliche Arbeit wäre? Mit leichterer Mühe könnte man die Wurzel eines gegebenen Quadrats dadurch finden, daß man verschiedene Zahlen nach und nach so lange in sich selbst multiplicirte, bis man auf eine käme, deren Quadrat dem vorgegebenen, dessen Wurzel gesucht werden soll, gleich wäre. Allein wenn auch dieses Verfahren von Seiten der Kürze und Bequemlichkeit noch einmal so viele Vorzüge hätte, als es wirklich hat, so würde es doch deßwegen unzulässig seyn, weil in Wissenschaften, die alle ihre Anweisungen strenge erweisen sollen, überall kein Probiren Statt findet. Ehe wir aber nun zur richtigen Auflösung dieser Aufgabe fortschreiten, sind noch einige der in dieser Lehre gebräuchlichen Ausdrücke zu erläutern. Der Umstand, daß man nicht von jeder Quadratzahl die Wurzel genau finden kann, hat die Eintheilung der Quadratzahlen in vollkommene und unvollkommene veranlaßt. Vollkommene Quadratzahlen nämlich sind solche, deren Wurzeln man genau bestimmen kann, wie z. B. 4, 9, 25. Unvollkommene hingegen solche, aus welchen man die Wurzeln niemals genau, sondern nur durch Annäherung finden kann, wie z. B. die Zahlen 5, 7, 11 u. a. m. deren jede zur Wurzel eine ganze Zahl mit einem Bruche hat, welcher sich niemals nach aller Schärfe angeben läßt. Die Wurzeln der vollkommenen Quadratzahlen werden Rationalzahlen, die Wurzeln der unvollkommenen aber Irrationalzahlen genannt. Eine andere Eintheilung der Wurzeln gründet sich auf die Anzahl ihrer Theile. In dieser Hinsicht heißt eine Wurzel, die aus einer einfachen Ziffer bestehet, eine monomische oder eintheilige, eine solche, die aus zwey Theilen bestehet, eine binomische oder zweytheilige, eine solche aber, die mehr als zwey Theile hat, eine polynomische oder vieltheilige.

§. 96.

Die eintheiligen Wurzeln der vollkommenen Quadratzahlen zu finden, hat nicht die geringste Schwierigkeit, da man sie alle in dem Einmaleins antrifft; sollte aber diese Anwendung davon jemanden nicht sogleich geläufig seyn, der kann sich aus demselben alle diese Wurzeln mit ihren Quadraten zu diesem Gebrauche in ein besonderes Täfelchen bringen, welches desto nöthiger ist, da wir bald sehen werden, daß zur Entdeckung der vieltheiligen Wurzeln die Kenntniß der eintheiligen unumgänglich nöthig ist, indem man zu den ersteren nicht anders, als vermittelst der lezteren gelangen kann. Sezt man in dem Täfelchen jede Quadratzahl einer eintheiligen Wurzel gerade unter ihre Wurzel, so stehet es also:

√	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Da es nicht mehr als 9 einfache Zahlen giebt, so müssen alle vollkommene Quadratzahlen eintheiliger Wurzeln darin zu finden seyn.

Das Quadrat von 10 ist 100
= = = = 100 = 10000
= = = = 1000 = 1000000
= = = = 10000 = 100000000 u. s. w.

Demnach bekommt das Quadrat für jede Nulle die der Wurzel angehängt wird, ein Paar Nullen, und umgekehrt, die Wurzel, für jedes Paar Nullen, das dem Quadrate angehängt wird, eine Nulle weiter. Wenn daher eine der vorigen Quadratzahlen mit einem oder mehreren Paaren angehängter Nullen vorkommt, so kann ihre Wurzel eben so leicht gefunden werden. Man braucht nämlich zu dem Ende nur der Wurzel dez Ziffern dieser Zahl eben so viele einzelne Nullen an uhängen, als in dem Quadrate Paare derselben stehen. Z. B. die Wurzel von 3600 ist 60.

Die Wurzel von 640000 ist 800
Die Wurzel von 25000000 ist 5000

Eben dies gilt auch von Zahlen, welche vorne Nullen bey sich führen, und zehntheilige Brüche bedeuten. Für jede dergleichen Nullen in der Wurzel stehen in dem Quadrate entweder zwey Nullen, oder eben so viele Stellen, von der lezten Ziffer an bis zu der Stelle der einfachen Einheiten, wovon man sich eben so leicht überzeugen kann, wenn man (nach §. 87. — 89.) die Erhebung ins Quadrat verrichtet. Z. B. das Quadrat von 0,03 ist 0,0009; das Quadrat von 0,05 ist 0,0025; das Quadrat von 0,009 ist 0,000081.

§. 97.

Ehe wir nun die vollständige Anweisung zur Ausziehung der zweytheiligen und vieltheiligen Wurzeln geben können, muß vorher gezeigt werden, aus was für Theilen das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel bestehe. Denn wie bey der Division der Quotient nur dadurch erhalten wird, daß man nach und nach findet, wie oft der Divisior nach .... Tausendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten, Zehnteln, Hundertteln, Tausendteln .... im Dividendus enthalten sey; eben so wird eine vieltheilige Wurzel nur dadurch herausgebracht, daß man nach und nach die Wurzeln von den Quadraten der ..... Tausender, Hunderter, Zehner, Einheiten, Zehntel, Hundertel, Tausendtel ....., woraus die ganze Quadratzahl bestehet, auffindet. Es besteht aber das Quadrat einer jeden zweytheiligen Wurzel aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Producte des ersten Theils in den zweyten, und dem Quadrate des zweyten Theils, welches, wenn man I, den ersten und II, den zweyten Theil der Wurzel, und die rechter Hand oben beygesezte Ziffer 2, das Quadrat bedeuten läßt, kürzlich also ausgedrückt werden kann:

$$I^2 + 2 \times I \times II + II^2$$

Zum Beweis mache man das Quadrat von 75, aber so, daß man alle Partialproducte hinschreibt, wie sie sich durch die Multiplication ergeben, und sie am Ende erst in eine Summe zusammenzieht.

	75	75		
	75	75		
II²	= 25	= 5 × 5	=	Quadrat der 5 Einer
II × I	= 35	= 5 × 70	=	Product der 5 Einer in die 7 Zehner
I × II	= 35	= 70 × 5	=	Product der 7 Zehner in die 5 Einer
I²	= 49	= 70 × 70	=	Quadrat der 7 Zehner.
	5625	= □ 75	=	Quadrat der ganzen Zahl.

Die Zahl 5625 als die ganze Quadratzahl von 75 ist also aus 49 Hundertern, zweymal 35 Zehnern, und 25 Einern zusammengesezt, von welchen die 49 Hunderter das Quadrat der 7 Zehner, als des ersten Theils der Wurzel, von den beyden 35 Zehnern die einen das Product aus den 7 Zehnern in die 5 Einer, die andern das Product aus den 5 Einern in die 7 Zehner, folglich beyde zusammen das doppelte Product aus dem ersten in den zweyten Theil der Wurzel, und endlich die 25 Einer das Quadrat von den 5 Einern, als dem zweyten Theile der Wurzel sind. Demnach ist also, wenn man die Zahl 75 als eine zweytheilige Wurzel betrachtet, deren erster Theil 70, der andere aber 5 ist,

$$\overline{75}^2 = \overline{(70+5)}^2 = \overline{70}^2 + 2 \times 70 \times 5 + 5^2$$

Daß das, was so eben von dem Quadrate der Zahl 75 gezeigt worden ist, von den Quadraten aller andern zweytheiligen Wurzeln gleichmäßig gelten müsse, erhellet daraus, weil jede zweytheilige Wurzel zum ersten Theile Zehner, zum zweyten aber Einer hat, und das Quadrat eines Zehners, das heißt das Product eines Zehners in einen Zehner immer Hunderter, so wie das Product eines Zehners in einen Einer, oder eines Einers in einen Zehner immer Zehner, und das Quadrat eines Einers, das heißt das Product eines Einers in einen Einer immer Einer giebt.

Eben so findet man z. B. das Quadrat von 84:

84
84
336
672
7056

$84 = 80 + 4$

$84^2 = 80^2 + 2 \times 80 \times 4 + 4^2$

6400
640
16
7056

Das Quadrat von 96:

96
96
576
864
9216

$96 = 90 + 6$

$96^2 = 90^2 + 2 \times 90 \times 6 + 6^2$

8100
1080
36
9216

§. 98.

Um das Quadrat einer vieltheiligen Wurzel auf diese Art zu finden, hat man bloß das eben gezeigte Verfahren mehrmals zu wiederholen. Die Wurzel mag nämlich so viel Theile haben, als man will, so nehme man zuerst die Ziffern derselben von allen höheren Ordnungen zusammen, und sehe sie als den ersten Theil, die Ziffer der Einheiten aber als den zweyten Theil der Wurzel an, hierauf mache man (nach dem vorigen §.) das Quadrat des ersten Theils, das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten und das Quadrat des zweyten Theils, aber so, daß man die vorzunehmenden Multiplicationen und Erhebungen ins Quadrat nicht wirklich verrichtet, sondern bloß durch die gehörigen Zeichen andeuter, so wird die Wurzel von dem Quadrate des ersten Theils noch eine vieltheilige, zum wenigsten noch eine zweytheilige Wurzel seyn. Man theile also diese aufs Neue durch Absonderung ihrer niedrigsten Ziffer in zwey Theile, nehme wiederum die Quadrate dieser beydeu Theile, und das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, und so seze man dieses Verfahren fort, bis man endlich auf einen ersten Theil kommt, der nur eine einzige Ziffer hat. Nachdem man nun von diesem und seinem zugehörigen zweyten Theile, wie bey allen vorhergehenden, die Quadrate, sammt dem doppelten Producte aus dem ersten Theile in den zweyten, in den Factoren hingesezt, so mache man alle diese Producte

und Quadrate, von dem lezten an bis auf das erste hinauf, wirklich, aber so, daß man dabey das erste Glied in allen Reihen, ausgenommen in der lezten, übergeht, weil das erste Glied einer jeden vorhergehenden Reihe in der nachfolgenden entwickelt ist; diese Producte und Quadrate seze man sodann genau untereinander, und addire sie, so wird ihre Summe das Quadrat der ganzen vorgegebenen Zahl seyn.

Z. B. das Quadrat von 365:

$$\begin{aligned}
\underline{365} &= \underline{360} + 5\\
\underline{365}^2 &= \underline{360}^2 + 2\times 360\times 5 + 5^2\\
\underline{360}^2 &= \underline{300}^2 + 2\times 300\times 60 + \underline{60}^2\\
\hline
\underline{\underline{365}}^2 &= \underline{\underline{300}}^2 + 2\times 300\times 60 + \underline{\underline{60}}^2 + 2\times 360\times 5 + 5^2
\end{aligned}$$

365	90000
355	36000
1825	3600
2190	3600
1095	25
133225	133225

Das Quadrat von 5875:

$$\begin{aligned}
\underline{5875} &= \underline{5870} + 5\\
\underline{5875}^2 &= \underline{5870}^2 + 2\times 5870\times 5 + 5^2\\
\underline{5870}^2 &= \underline{5800}^2 + 2\times 5800\times 70 + \underline{70}^2\\
\underline{5800}^2 &= \underline{5000}^2 + 2\times 5000\times 800 + \underline{800}^2\\
\hline
\underline{\underline{5875}}^2 &= \underline{\underline{5000}}^2 + 2\times 5000\times 800 + \underline{\underline{800}}^2 +\\
&\quad 2\times 5800\times 70 + \underline{70}^2 + 2\times 5870\times 5 + 5^2
\end{aligned}$$

5875	25000000
5875	8000000
29375	640000
41125	812000
47000	4900
29375	58700
	25
34515625	34515625

Das Quadrat von 21756:

$$\underline{21756} = \underline{21750} + 6$$
$$\underline{21756}^2 = \underline{21750}^2 + 2 \times 21750 \times 6 + 6^2$$
$$\underline{21750}^2 = \underline{21700}^2 + 2 \times 21700 \times 50 + \overline{50}^2$$
$$\underline{21700}^2 = \underline{21000}^2 + 2 \times 21000 \times 700 + \overline{700}^2$$
$$\underline{21000}^2 = 20000^2 + 2 \times 20000 \times 1000 + \overline{1000}^2$$

$$\overline{21756}^2 = 20000^2 + 2 \times 20000 \times 1000 + \overline{1000}^2$$
$$+ 2 \times 21000 \times 700 + \overline{700}^2 + 2 \times 21700 \times 50 + \overline{50}^2$$
$$+ 2 \times 21750 \times 6 + 6^2$$

21756	400000000
21756	42000000
130536	1000000
108780	29400000
152292	490000
11756	2170000
43512	2500
473323536	261000
	36
	473323536

Das Quadrat von 254326:

$$\underline{254326} = \underline{254320} + 6$$
$$\underline{254326}^2 = \underline{254320}^2 + 2 \times 254320 \times 6 + 6^2$$
$$\underline{254320}^2 = \underline{254300}^2 + 2 \times 254300 \times 20 + \overline{20}^2$$
$$\underline{254300}^2 = \underline{254000}^2 + 2 \times 254000 \times 300 + \overline{300}^2$$
$$\underline{254000}^2 = \underline{250000}^2 + 2 \times 250000 \times 4000 + \overline{4000}^2$$
$$\underline{250000}^2 = 200000^2 + 2 \times 200000 \times 50000 + \overline{50000}^2$$

$$\overline{254326}^2 = 200000^2 + 2 \times 200000 \times 50000 + \overline{50000}^2$$
$$+ 2 \times 250000 \times 4000 + \overline{4000}^2 + 2 \times 254000 \times 300$$
$$+ \overline{300}^2 + 2 \times 254300 \times 20 + \overline{20}^2 + 2 \times 254320 \times 6$$
$$+ 6^2$$

254326	40000000000
254326	20000000000
1525956	2500000000
508652	2000000000
762978	16000000
1017304	152400000
1271630	90000
508652	10172000
	400
	3051840
	36
646817714276	646817714276

§. 99.

Aus den bisherigen Betrachtnngen über die Zusammensezung der Quadratzahlen fließen folgende Säze:

I. Das Quadrat einer jeden Zahl, die mir mehr, als zwey, Ziffern geschrieben wird, hat mehr, als vier Ziffern.

II. Von einer Zahl, die drey oder vier Ziffern hat, muß die Quadratwurzel zwey Ziffern, und kann nicht mehr haben.

III. Wenn eine Zahl von drey oder vier Ziffern von der rechten gegen die linke in Klassen getheilt wird, deren jede zwey Ziffern, oder die linke nur eine enthält, so steckt in der linken Klasse das Quadrat des Zehners und etwas von dem doppelten Producte des Einers in den Zehner in der rechten Klasse aber das übrige dieses Products sammt dem Quadrate des Einers der Wurzel.

IV. Das größte Quadrat, das in der linken Klasse steckt, ist das Quadrat des Zehners der Wurzel.

V. Zieht man daher von dem Quadrate des Zehners ein ihm gleiches Quadrat ab, so bleibt das doppelte Product aus dem Einer in den Zehner sammt dem Quadrate des Einers der Wurzel übrig.

VI. Zieht man aber von der in der linken Klasse befindlichen Zahl, wofern sie keine vollkommene Qua-

dratzahl ist, das nächstkleinere Quadrat ab; so muß das übrig bleiben, was von dem doppelten Producte des Einers in den Zehner zu dem Quadrate des Zehners übergetragen worden ist.

VII. Das Product aus dem Einer in den Zehner ist allemal von der Ordnung der Zehner; wenn nun ein Product aus zwey Factoren durch den einen von beyden, oder ein Product aus drey Factoren durch zwey derselben dividirt wird, so findet man zum Quotienten den übrigen Factor. Wenn man demnach das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, oder aus dem Zehner in den Einer der Wurzel durch den doppelten ersten Theil dividirt, so muß man dadurch den andern Theil, oder den Einer der Wurzel erhalten, dessen doppeltes Product in den ersten Theil sammt seinem Quadrate von dem zuerst erhaltenen Reste abgezogen nichts übrig lassen muß, wenn anders die vorgegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl ist, weil alsdann alle Theile, die sie enthält, nach und nach von ihr weggenommen worden sind.

VIII. Wenn zu der Wurzel ein neuer Theil hinzukommt, so kommt zu dem Quadrate ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen und das Quadrat des neuen Theils hinzu. Wenn also eine vieltheilige Wurzel um einen Theil wächst, so kommt zu ihrem Quadrate eben so was hinzu, als zu dem Quadrate einer eintheiligen Wurzel hinzukommt, wenn sie um einen Theil vermehrt oder eine zweytheilige aus ihr wird. Was hier der zweyte Theil ist, ist dort der neue, statt des dortigen ersten Theils ist hier die Summe aller vorhergehenden Theile.

IX. Jedes Quadrat bestehet aus den Quadraten aller Theile der Wurzel und aus den doppelten Producten der Summen aller ersten Theile in jeden nächstfolgenden, z. B. des ersten und zweyten in den dritten, des ersten, zweyten und dritten in

den vierten, des ersten, zweyten, dritten und vierten in den fünften u. s. w.

X. Wenn man eine Zahl von der rechten Hand gegen die linke in Klassen eintheilt, so daß jede Klasse zwey Ziffern oder die erste bey der linken Hand auch nur eine bekommt, so hat die Zahl so viele Klassen, als ihre Wurzel Ziffern hat.

XI. das größte Quadrat, das in der höchsten Klasse steckt, ist das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel.

XII. Was noch überdies in der höchsten Klasse steckt, zu der höchsten Ziffer der nächstfolgenden Klasse gerechnet, enthält das doppelte Product aus dem höchsten Theile der Wurzel in den nächstfolgenden. Und was nach Abzug dieses Products übrig bleibt, samt der niedrigsten Ziffer der zweyten Klasse, enthält das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel, und folglich können aus den beyden höchsten Klassen die beyden höchsten Theile der Wurzel (nach Nro. V — VII.) gefunden werden.

XIII. Was nach diesem Verfahren übrig bleibt, zu der höchsten Ziffer der dritten Klasse genommen, enthält das doppelte Product aus den ersten beyden Theilen zusammen in den dritten, und was nach Abzug dieses doppelten Products übrig bleibt, nebst der niedrigsten Ziffer der dritten Klasse, enthält das Quadrat des dritten Theils der Wurzel, den man also finden kann, wenn man die ersten beyden zusammen als einen ansieht, und damit, und mit der höchsten Ziffer der dritten Klasse, nebst der übrig gebliebenen höheren aus der zweyten, eben so verfährt, wie man mit dem ersten Theile und der höchsten Ziffer der zweyten Klasse, nebst den übrig gebliebenen höheren aus der ersten verfuhr, um den zweyten Theil zu finden.

XIV. Da man jedesmal so viele Ziffern, als man von der Wurzel schon gefunden hat, zusammen als einen einzigen Theil von der Ordnung der

niedrigsten Ziffer unter den gefundenen, und die nächste Ziffer, die man sucht, als den zweyten Theil ansehen kann, so kann man überhaupt jeden nächstfolgenden Theil der Wurzel eben so finden, wie man aus dem ersten Theile den zweyten findet, und eben so prüfen, ob man ihn richtig gefunden habe, indem man nämlich sein Quadrat und sein doppeltes Product in den ersten Theil zusammen addirt und von der niedrigsten Ziffer der Klasse, woraus man ihn gefunden hat, und den nächsthöheren noch übrigen abzieht. Und so giebt jede Klasse eine neue Ziffer der Wurzel.

§. 100.

Auf den Sätzen des vorigen §. beruht nun das ganze Verfahren, das man bey der Ausziehung der Quadratwurzel zu beobachten hat. Soll also zuerst aus einer Zahl, die drey oder vier Ziffern hat, die Quadratwurzel ausgezogen werden, so verfahre man folgendermaßen:

I. Man theile die Zahl von der rechten gegen die linke Hand in Klassen, so daß jede zwey Ziffern, oder auch die linke nur eine enthält.

II. Man suche, was für einer Ziffer ihr Quadrat so groß, oder zunächst kleiner ist als die linke Klasse, so ist dieses Quadrats Wurzel der Zehner der gesuchten Quadratwurzel, oder derselben erster Theil.

III. Man ziehe dieses Quadrat ab, so enthält der Rest noch das doppelte Product aus diesem ersten Theile in den zweyten und das Quadrat des zweyten Theils; und zwar steckt, wofern man das nächstkleinere Quadrat abgezogen hat, in dem, was sich von diesem Reste noch in der linken Klasse befindet, und in der höchsten Ziffer der rechten Klasse zusammen das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, und vielleicht noch etwas darüber.

IV. Man verdopple also den gefundenen ersten Theil der Wurzel, und dividire damit das, was sich von dem vorhin erwähnten Reste noch in der linken Klasse befindet, sammt der höchsten Ziffer der rechten Klasse, als eine Zahl betrachtet, oder wofern in der linken Klasse nichts übrig geblieben ist, die höchste Ziffer der rechten Klasse allein; in welcher Absicht man dieses doppelte Product so unterzuschreiben hat, daß seine niedrigste Ziffer unter die niedrigste Ziffer dieser Zahl oder unter die höchste Ziffer der rechten Klasse zu stehen kommt.

V. Der Quotient, den man hierdurch erhält, ist nicht kleiner, er kann aber wohl größer seyn, als der zweyte Theil der Wurzel.

VI. Man multiplicire ihn also mit dem doppelten ersten Theile und schreibe dieses Product unter das Doppelte des ersten Theils, weil es von eben der Ordnung ist.

VII. Man mache ferner das Quadrat des zweyten Theils des Quotienten und schreibe desselben niedrigste Ziffer in die Stelle der Einer, die höhere aber in die Stelle der Zehner.

VIII. Man addire die nach Nro VI u. VII. gefundenen Zahlen, so ist ihre Summe entweder:

a) eben so groß, als der (nach Nro III.) erhaltene Rest, und dann ist der gefundene Quotient die Wurzel; oder:

b) sie ist kleiner, als der gedachte Rest, und dann ist der Quotient kleiner, als die eigentliche Wurzel, aber diese ist um keine ganze Einheit größer, sonst hätte man (nach Nro V.) den zweyten Theil des Quotienten um eins größer gefunden. In diesem Falle kennt man also zwey Zahlen, die nur um eins unterschieden sind, zwischen welche die Wurzel fallen muß; oder endlich:

c) sie ist größer, als der gedachte Rest, und dann ist der zweyte Theil des Quotienten zu groß

angenommen. Man vermindere ihn also so lange, bis man auf einen zweyten Theil kommt, der so beschaffen ist, daß die Summe seines doppelten Products in den ersten Theil und seines Quadrats, entweder eben so groß, oder kleiner ist, als der (nach Nro III.) gefundene Rest, wovon sodann im ersten Falle das gilt, was bey (a) im andern aber was bey (b) gesagt worden ist.

IX. Die Regeln V — VIII. lassen sich folgendermaßen in eine zusammenziehen:

Man schreibe rechter Hand neben das Doppelte des ersten Theils den gefundenen zweyten Theil des Quotienten, und multiplicire die Zahl, die nun aus dem doppelten ersten und dem gefundenen zweyten Theile des Quotienten bestehet, mit diesem zweyten Theile, so erhält man das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten sammt dem Quadrate des zweyten Theils des Quotienten auf einmal, und hat nur noch zu untersuchen, welcher von den drey unter Nro. VIII. begriffenen Fällen Statt finde.

Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens fließt aus den Säzen I — VII. des vorigen §.

Die Probe, ob man im Rechnen nicht gefehlt habe, kann nach geendigter Rechnung damit angestellt werden, daß man den gefundenen Quotienten mit sich selbst multiplicirt, und im Falle von Nro. VIII. (b) den zulezt erhaltenen Rest zu diesem Producte addirt, wo sodann, wofern man richtig gerechnet hat, die gegebene Zahl wieder herauskommen muß.

Beyspiele.

$$\begin{array}{r|l} 7|84 & 28 \\ \hline 1^2 = 4 & \\ \underline{\quad} & \\ 384 & \\ 2\times 1 = (4)8 & \\ 2\times 1\times 11 + 11^2 = \underline{384} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5|29 & 23 \\ \hline 1^2 = 4 & \\ \underline{\quad} & \\ 129 & \\ 2\times 1 = (4)3 & \\ 2\times 1\times 11 + 11^2 = \underline{129} & \end{array}$$

9|61|31
$1^2 = 9$ 6
61
$2 \times 1 = (6)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 61$

19|36|44
$1^2 = 16$
336
$2 \times 1 = (8)4$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 336$

37|21|61
$1^2 = 36$
121
$2 \times 1 = (12)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 121$

98|01|99
$1^2 = 81$
1701
$2 \times 1 = (18)9$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 1701$

§. 101.

Soll aus einer Zahl, die mehr als 4 Ziffern hat, es mögen ihrer hernach so viel seyn, als man will, die Quadratwurzel gezogen werden, so hat man folgende Regeln zu beobachten:

I. Man theile die Zahl von der rechten gegen die linke in Klassen, deren jede zwey Ziffern, oder die höchste auch nur eine enthält, so wird die Wurzel so viel Ziffern haben, als Klassen herauskommen.

II. Man suche was für einer Ziffer ihr Quadrat der höchsten Klasse gleich, oder zunächst kleiner ist; diese Ziffer ist die höchste der Wurzel, deren Quadrat man von der höchsten Klasse der gegebenen Zahl abziehen muß.

III. Zu dem, was in dieser Klasse übrig bleibt, nehme man die folgende Klasse, und schreibe unter

die höchste Ziffer derselben die niedrigste Ziffer des verdoppelten gefundenen Theils der Wurzel, die höheren Ziffern dieses doppelten aber nach der Ordnung weiter gegen die linke Hand zu. Mit diesem Doppelten dividire man in die Ziffern, welche darüber stehen, und nehme den Quotienten für den nächstfolgenden Theil der Wurzel an.

IV. Diesen Quotienten multiplicire man mit dem Doppelten des ersten Theils, und schreibe das Product auch so, daß es sich unter dem Anfange dieses Doppelten anfängt.

V. Man mache auch das Quadrat des Quotienten und fange es unter der niedrigsten Ziffer der Klasse, aus deren höchsten Ziffer man den Quotienten gefunden hat, zu schreiben an, so daß die höhere Ziffer dieses Quadrats unter die höchste Ziffer der erwähnten Klasse zu stehen kommt.

VI. Man addire dieses doppelte Product des ersten Theils der Wurzel in den Quotienten, und das Quadrat des zweyten Theils; wenn sich nun deren Summe von den darüber stehenden Zahlen abziehen läßt, so ist der Quotient der gesuchte Theil der Wurzel. Ist aber die gedachte Summe größer, als das, was über ihr stehet, so muß man den Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug geschehen kann.

VII. Zu dem, was hiebey übrig bleibt, ziehe man die folgende Klasse herunter, sehe so viele Ziffern von der Wurzel, als man schon gefunden hat, zusammen als den ersten Theil derselben an, und verfahre, um daraus den nächstfolgenden zu finden, (nach Nro. III — VI.)

VIII. Diese Arbeit seze man fort, bis man alle Ziffern der Wurzel bis mit auf den Einer gefunden hat; und wenn alsdann in den Stellen der Einer und Zehner noch etwas übrig bleibt, so ist die gefundene Zahl zunächst kleiner als die Wurzel, so daß, wenn man diese Zahl um eins vermehrte, sie größer, als die Wurzel seyn würde.

IX. Die Regeln IV — VI lassen sich eben so, wie beym vorigen §. VI — VIII in eine zusammenziehen.

Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens ist in den Säzen VII — XIII des §. 99. enthalten.

Die Probe wird wiederum dadurch gemacht, daß man den gefundenen Quotienten mit sich selbst multiplicirt, und wenn zulezt ein Rest geblieben ist, solchen zu dem Producte addirt, wo sodann die Summe, wofern man richtig gerechnet hat, die gegebene Zahl wieder herstellen muß.

Beyspiele.

1|63|84⌉138

$l^2 = 1$

63

$2 \times l = (2)2$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 44$

1984

$2 \times l = (24)8$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 1984$

97|61|44⌉988

$l^2 = 81$

1661

$2 \times l = (18)8$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 1504$

15744

$2 \times l = (196)8$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 15744$

1|33|63|36⌉1156

$l^2 = 1$

33

$2 \times l = (2)1$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 21$

1263

$2 \times l = (22)5$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 1125$

13836

$2 \times l = (230)6$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 13836$

7|66|18|24⌉2768

$l^2 = 4$

366

$2 \times l = (4)7$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 329$

3718

$2 \times l = (54)6$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 3276$

44224

$2 \times l = (552)8$

$2 \times l \times ll + ll^2 = 44224$

26|26|56|25|5125
$1^2 = 25$
126
$2 \times 1 = (10)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 101$
2556
$2 \times 1 = (102)2$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 2044$
51225
$2 \times 1 = (1024)5$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 51221$

36|30|06|25|6025
$1^2 = 36$
30
$2 \times 1 = (12)$
3006
$2 \times 1 = (120)2$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 2404$
60225
$2 \times 1 = (1204)5$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 60225$

1|23|45|43|21|11111
$1^2 = 1$
23
$2 \times 1 = (2)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 21$
245
$2 \times 1 = (22)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 221$
2443
$2 \times 1 = (222)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 2221$
22221
$2 \times 1 = (2222)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 22221$

1|00|02|00|01|10001
$1^2 = 1$
00020001
$2 \times 1 = (2000)1$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 20001$

§. 102.

Soll aus einem Bruche die Quadratwurzel ausgezogen werden, so ist diese ein Bruch, der zum Zähler hat die Quadratwurzel aus dem Zähler, und zum Nenner die Quadratwurzel aus dem Nenner des gegebenen. Denn es folgt aus der Lehre von der Multiplication der Brüche überhaupt und aus dem Begriffe einer Quadratzahl ins Besondere, daß das Quadrat eines Bruchs ein Bruch ist, den man erhält, wenn man den gegebenen Bruch mit sich selbst multi=

plicirt d. h. wenn man das Quadrat seines Zählers zum Zähler und das Quadrat seines Nenners zum Nenner macht. Z. B. $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$; $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$.

§. 103.

Soll endlich aus einer gemischten Zahl die Quadratwurzel gezogen werden, so hat man dieselbige nach §. 20. Nro. II. in einen unächten Bruch zu verwandeln, und alsdann die Ausziehung der Wurzel nach den vorigen §. zu verrichten. Z. B.

$$\sqrt{8\tfrac{1}{36}} = \sqrt{\tfrac{289}{36}} = \tfrac{17}{6} = 2\tfrac{5}{6}; \quad \sqrt{10\tfrac{9}{16}} = \sqrt{\tfrac{169}{16}} = \tfrac{13}{4} = 3\tfrac{1}{4}.$$

§. 104.

Wenn man die Quadrate der Zahlen, nach der Ordnung, wie sie in dem Wurzeltäfelchen (§. 96.) auf einander folgen, betrachtet, und sie mit der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. vergleicht, so findet man, daß zwischen jede zwey der ersteren verschiedene der leztern fallen, z. B. zwischen 4 und 9 die Zahlen 5, 6, 7, 8, zwischen 9 und 16 die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15 und so immer mehrere, je weiter man die Vergleichung fortsezt. Alle diese Zahlen können keine ganze Zahlen zu Wurzeln haben. Denn wenn z. B. die Zahl 7 eine ganze Zahl zur Wurzel haben sollte, so müßte diese größer seyn als 2, die Wurzel von 4, und kleiner als 3, die Wurzel von 9, weil die Zahl 7 zwischen die Zahlen 4 und 9 in der Reihe der Quadrate fällt. Da es nun keine ganze Zahl giebt, die größer als 2 und kleiner als 3 wäre, so kann auch die Zahl 7 keine ganze Zahl zur Wurzel haben. Und eben so verhält es sich auch mit allen übrigen Zahlen dieser Art. Da aber zwischen jede zwey ganze Zahlen unendlich viele gebrochene fallen, so sollte man denken, es müßte sich unter diesen unendlich vielen Brüchen für jede ganze Zahl wenigstens eine genaue Wurzel finden lassen. Gleichwohl ist es so weit gefehlt, daß dem also wäre, daß vielmehr die Wurzeln aller Zahlen, welche zwischen zwey Quadratzahlen fallen, durch unsere angenommenen Zahlzeichen weder

geschrieben noch ausgesprochen, also überall nicht ausgedrückt werden können, ungeachtet es an sich nicht widersprechend ist, Zahlen zu gedenken, welche die Eigenschaft hätten, daß sie, wenn sie mit sich selbst multiplicirt würden, diejenigen Zahlen hervorbrächten, welche zwischen die Quadratzahlen hineinfallen. Man wird auch leicht einsehen, daß dies beydes wohl zusammen bestehen könne, wenn man sich nur erinnert, daß unendlich viele ächte und unächte Brüche, die als gemeine Brüche gar wohl geschrieben und ausgesprochen werden können, sich als Decimalbrüche niemals mit erschöpfender Genauigkeit ausdrücken lassen.

Daß nun eben dieses auch bey den Wurzeln der unvollkommenen Quadratzahlen der Fall sey, kann durch folgende Schlüsse dargethan werden:

I. Hat man einen Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht, so kann auch dessen Quadrat nicht weiter auf eine kleinere Benennung gebracht werden.

Denn sollte dies geschehen können, so müßte (nach §. 31. 81. 102.) der Zähler und Nenner dieses Quadrats ein gemeinschaftliches Maaß haben, welches bey einem Bruche dessen Wurzel schon auf die kleinste Benennung gebracht worden, unmöglich ist. Denn da der Zähler und Nenner des Quadrats keine andere einfache Zahlen zu Factoren haben, als der Zähler und Nenner der Wurzel, so müßte dieselbe einfache Zahl, welche ein Factor vom Zähler und Nenner des Quadrats seyn sollte, auch ein Factor vom Zähler und Nenner der Wurzel seyn, und folglich die leztere noch auf eine kleinere Benennung gebracht werden können, welches unserer Voraussezung widerspricht.

II. Das Quadrat eines eigentlichen Bruchs, er sey ein ächter oder unächter, kann also unmöglich eine ganze Zahl seyn.

Denn man mache das Quadrat der Wurzel, nachdem man diese zuvor auf die kleinste Benennung gebracht, so müßte dieses Quadrat, um einer ganzen Zahl gleich zu werden, auf die kleinste überall mögliche

Benennung, nämlich auf die Benennung 1, grbracht werden können. Da sich aber dieses Quadrat (nach Nro I.) durchaus nicht auf eine kleinere Benennung bringen läßt, so kann es noch viel weniger auf die kleinste, überall mögliche, Benennung gebracht werden.

III. Jede ganze Zahl, die keine ganze Zahl zur Wurzel hat, kann folglich auch keinen Bruch zur Wurzel haben, oder kann auch nicht das Quadrat eines Bruchs seyn.

Denn wenn dies wäre, so müßte das Quadrat eines Bruchs eine ganze Zahl seyn können, welches (nach Nro II.) unmöglich ist.

IV. Läßt sich aber von einer Zahl weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl angeben, die sie zur Wurzel hätte, so läßt sich die Wurzel diser Zahl überall nicht angeben. Nun ist das Erste bey allen unvollkommenen Quadratzahlen der Fall (nach Nro. I — III.), also auch das Lezte.

§. 105.

Gleichwohl kann man den Wurzeln solcher Zahlen so nahe kommen, als man will. Man bedient sich dazu des nämlichen Verfahrens, welches oben in §. 92. gezeigt worden ist, um einen Quotienten, der sich nicht genau angeben läßt, doch so genau, als es die jedesmalige Absicht erfordert, auszudrücken, und darin bestehet, daß man nach Anhängung einer beliebigen Anzahl von Nullen, die Arbeit, so lange man es nöthig findet, fortsezt, mit dem einzigen Unterschiede, daß man hier die Nullen immer paarweise anhängen muß, weil, wenn man anuimmt, daß die Wurzel Zehntheilchen enthalte, das Quadrat Hunderttheilchen, wenn aber die Wurzel Hunderttheilchen enthalten solle, das Quadrat Zehntausendtheilchen enthalten muß, u. s. w. so daß man also für jedes dem Quadrate angehängte Paar Nullen eine neue Ziffer der Wurzel bekommt, wie man oben bey der Division für jede einzelne, dem Dividendus angehängte, Nulle eine neue

Ziffer des Quotienten bekam. Auch kann diese Anhängung der Nullen hier eben so, wie dort, entweder gleich Anfangs, nachdem man den Ort der einfachen Einheiten bestimmt, auf einmal, oder, wenn man zuvor die Ausziehung der Wurzel so weit verrichtet, als man damit kommen konnte, erst nach und nach bey dem jedesmaligen Reste, geschehen. Endlich erhellet aus den nämlichen Gründen, wie bey der Division, daß man diese Annäherung o weit treiben könne, als man nur will, und daß man auf diese Art der gesuchten Wurzel um so viel näher komme, je mehr Nullen man dem Quadrate angehängt hat.

1|47|62|23|1214,99

$1^2 = 1$

47

$2 \times 1 = (2)1$

$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 44$

362

$2 \times 1 = (24)1$

$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 241$

12123

$2 \times 1 = (242)4$

$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 9696$

242700

$2 \times 1 = (2428)9$

$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 218601$

2409900

$2 \times 1 = (24298)9$

$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 2186901$

222999

41|60|23|644,96
$1^2 = 36$
560
$2 \times 1 = (12)4$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 496$
6423
$2 \times 1 = (128)4$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 4136$
128700
$2 \times 1 = (1288)9$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 116001$
1269900
$2 \times 1 = (12898)9$
$2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 1160901$
108999

§. 106.

Eben so wird die Ausziehung der Quadratwurzel auch bey Decimalbrüchen verrichtet, nur daß bey diesen wenn man eine vorgegebene Quadratzahl in ihre Klassen abtheilt, ein Theilungszeichen allemal durch das Decimalzeichen gehen, oder unmittelbar vor demselben eine Klasse sich endigen muß, weil man sonst nicht bestimmen könnte, von welcher Ordnung die gefundenen Ziffern der Wurzel wären. Wenn daher in einer solchen Quadratzahl nach dem Decimalzeichen eine ungerade Zahl von Ziffern folgt, so muß man sie durch Anhängung einer Nulle zuvor in eine gerade verwandeln. Uebrigens sind die Gründe der Rechnung die nämlichen, wie bey ganzen Zahlen.

0,|00|39|70| 0,063
36
370
(18)3
369
1

0,|05|17|83| 0,227
4
117
(4)2
84
3383
(44)7
3129
254

0,|01|19|01|70| 0,'1090
1

1901
(20)9
1881

2070

9|01,|35|84|70| 30,022
9

013584
(600)2
12004

158070
(6004)2
120084

37986

§. 107.

Nach dieser ausführlichen Anleitung zur Ausziehung der Quadratwurzel kann nun die Ausziehung der Cubikwurzel nicht mehr schwer fallen. Für das erste ist hievon zu bemerken, daß alles, was oben in §. 95. von den Quadratzahlen gesagt worden ist, nach gehöriger Abänderung der Benennungen, auch gleichmäßig von den Cubikzahlen gelte. Auch für die Cubikzahlen aller eintheiligen Wurzeln kann man sich eben so, und, zu gleicher Absicht, wie es oben (in §. 96.) für die Quadratzahlen der ebengenannten Wurzeln geschehen ist, ein Wurzeltäfelchen verfertigen, welches, wenn man auch die Quadratzahlen dieser Wurzeln darein aufnimmt, folgende Gestalt bekommt.

√	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Der Cubus von 10 ist 1000
= = = = 100 = 1000000
= = = = 1000 = 1000000000
= = = = 10000 = 1000000000000 u. s. w.

Hieraus kann man schon sehen, nach welchem Gesetze das Zunehmen der Nullen in der Wurzel fortschreite; der Cubus bekommt nämlich für jede Nulle, die der Wurzel angehängt wird, drey Nullen, und die

Wurzel für jede drey Nullen, die dem Cubus angehängt werden, eine Nulle weiter. Die Anwendung dieses Gesezes ist derjenigen vollkommen ähnlich, welche in §. 96. von dem Gesezе des übereinstimmenden Fortschreitens der Nullen in den Quadraten und deren Wurzeln auf die Ausziehung der lezteren gemacht wurde; auch gilt dieses Gesez, wie das zulezt genannte, von Decimalbrüchen ebensowohl, als von ganzen Zahlen.

§. 108.

Bevor die Ausziehung der Cubikwurzel gründlich gezeigt werden kann, muß erst die Zusammensezung einer Cubikzahl aus den verschiedenen Theilen ihrer Wurzel, wie wir es oben (in §. 97.) bey den Quadratzahlen gethan haben, untersucht werden. Da sich alle Wurzeln, so viele Theile sie auch immer haben mögen, auf zweytheilige zurückführen lassen, indem man alle Ziffern der höheren Ordnungen zusammengenommen als den ersten Theil, die Ziffer der Einheiten aber als den zweyten Theil betrachtet, so ist es auch hier für alle Fälle hinreichend, zu wissen, wie die Cubikzahl einer zweytheiligen Wurzel aus den verschiedenen Theilen ihrer Wurzel zusammengesezt werde. Es bestehet aber der Cubus einer jeden zweytheiligen Wurzel aus dem Cubus des ersten Theils, dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten Theil, dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des zweyten Theils in den ersten Theil, und dem Cubus des zweyten Theils, welches, wenn man den Cubus einer Zahl durch die derselben rechter Hand oben beygesezte Ziffer 3 bezeichnet, und übrigens die in §. 97. gebrauchten Zeichen beybehält, durch folgende allgemeine Formel kürzlich ausgedrückt werden kann:

$$I^3 + 3 \times I^2 \times II + 3 \times I \times II^2 + II^3$$

Um zu sehen, wie alle in dieser Formel begriffenen Theile der Wurzel nach und nach in den Cubus hineinkommen, mache man zuerst das Quadrat der Zahl 86 so, daß man jeden einzelnen Theil desselben besonders hinschreibt, wie man ihn durch die Multiplication erhält.

$$\begin{array}{r} 86 \\ 86 \\ \hline \end{array}$$

$II^2 = 36 = 6 \times 6 =$ Quadrat der 6 Einer.

$II \times I = 48 = 6 \times 8 =$ Product der 6 Einer in die 8 Zehner.

$I \times II = 48 = 8 \times 6 =$ Product der 8 Zehner in die 6 Einer.

$I^2 = 64 = 8 \times 8 =$ Quadrat der 8 Zehner.

$$\underline{\qquad\qquad}$$

3796

Wenn man nun jeden dieser einzelnen Theile des Quadrats von 86 aufs Neue mit den beyden Theilen der Wurzel, nämlich mit den 6 Einern und den 8 Zehnern besonders multiplicirt, so erhält man alle Theile des Cubus von 86 nach einander in der Ordnung, wie sie in denselben hineinkommen.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$II^3 = 216 =$ Cubus der 6 Einer, oder des zweyten Theils

$$\begin{array}{r} 36 \\ 80 \\ \hline \end{array}$$

$I \times II^2 = 2880 =$ Product der 8 Zehner in das Quadrat der 6 Einer, oder des ersten Theils in das Quadrat des zweyten.

$$\begin{array}{r} 480 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$I \times II^2 = 2880 =$ Product des ersten Theils in das Quadrat des zweyten.

$$\begin{array}{r} 480 \\ 80 \\ \hline \end{array}$$

$I^2 \times II = 38400 =$ Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweyten

$$\begin{array}{r} 480 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$I \times II^2 = 2880 =$ Product des ersten Theils in das Quadrat des zweyten.

lich der Cubus einer vieltheiligen Wurzel sochergestalt aus den Theilen der Wurzel zusammengesezt werden, so sehe man alle Ziffern der Wurzel bis auf die Ziffer der Einer für den ersten, die Ziffer der Einer aber für den zweyten Theil der Wurzel an, und führe uun die Rechnung nach der im vorigen §. gegebenen allgemeinen Regel, so daß man alle Glieder nur durch ihre Factoren ansdrückt, und mit den gehörigen Zeichen unter einander verbindet. So lange nun der Cubus des ersten Theils noch eine vieltheilige Wurzel hat, so lange entwickle man denselben durch fortgesezte Theilung der Wurzel nach der nämlichen Formel allemal wieder in einer neuen Reihe, bis man endlich auf einen ersten Theil kommt, der nur eine eintheilige Wurzel hat. Nun mache man alle die Producte, mit Uebergehung des ersten Glieds einer jeden Reihe, das der lezten allein ausgenommen, wirklich und addire sie, so giebt ihre Summe den verlangten Cubus der gegebenen vieltheiligen Wurzel. Z. B. es sey der Cubus von 5678 so zu machen:

$$\underline{5678} = 5670 + 8$$

$$\overline{5678}^3 = (5670 + 8)^3$$

$$(5670+8)^3 = \overline{5670}^3 + 3 \times \overline{5670}^2 \times 8 + 3 \times 5670 \times 8^2 + 8^3$$

$$\overline{5670}^3 = \overline{5600}^3 + 3 \times \overline{5600}^2 \times 70 + 3 \times 5600 \times \overline{70}^2 + \overline{70}^3$$

$$\overline{5600}^3 = \overline{5000}^3 + 3 \times \overline{5000}^2 \times 600 + 3 \times 5000 \times \overline{600}^2 + \overline{600}^3$$

$$\overline{5678}^3 = \overline{5000}^3 + 3 \times \overline{5000}^2 \times 600 + 3 \times 5000 \times \overline{600}^2 + \overline{600}^3 + 3 \times \overline{5600}^2 \times 70 + 3 \times 5600 \times \overline{70}^2 + \overline{70}^3 + 3 \times \overline{5670}^2 \times 8 + 3 \times 5670 \times 8^2 + 8^3$$

$125 \ldots\ldots = \overline{\overline{5000}^{3}}$
$450 \ldots\ldots = 3 \times \overline{\overline{5000}^{2}} \times 600$
$540 \ldots\ldots = 3 \times 5000 \times \overline{600}^{2}$
$216 \ldots\ldots = \overline{600}^{3}$
$65856 \ldots\ldots = 3 \times \overline{\overline{5600}^{2}} \times 70$
$8232 \ldots\ldots = 3 \times 5600 \times \overline{70}^{2}$
$343 \ldots\ldots = \overline{70}^{3}$
$7715736 \ldots = 3 \times \overline{\overline{5670}^{2}} \times 8$
$108864 \ldots = 3 \times 5670 \times \overline{8}^{2}$
$512 = \overline{8}^{3}$

183056925752

5678
5678
45424
39746
33068
28390
32239684
5678
257917472
225677788
193438104
161198420
183056925752

Es soll der Cubus von 475 auf eben diese Art zusammengesezt werden, so ist:

$475 = 470 + 5$
$\overline{475}^{3} = (470 + 5)^{3}$
$(470+5)^{3} = \overline{470}^{3} + 3 \times \overline{470}^{2} \times 5 + 3 \times 470 \times 5^{2} + 5^{3}$
$\overline{470}^{3} = \overline{400}^{3} + 3 \times \overline{400}^{2} \times 70 + 3 \times 400 \times \overline{70}^{2} + \overline{70}^{3}$
$\overline{475}^{3} = \overline{400}^{3} + 3 \times \overline{400}^{2} \times 70 + 3 \times 400 \times \overline{70}^{2} + \overline{70}^{3}$
$+ 3 \times \overline{470}^{2} \times 5 + 3 \times 470 \times 5^{2} + 5^{3}$

$64 \ldots\ldots = \overline{\overline{400}^{3}}$
$336 \ldots\ldots = 3 \times \overline{\overline{400}^{2}} \times 70$
$588 \ldots\ldots = 3 \times 400 \times \overline{70}^{2}$
$343 \ldots = \overline{70}^{3}$
$33135 \ldots = 3 \times \overline{470}^{2} \times 5$
$3525 \ldots = 3 \times 470 \times 5^{2}$
$125 = 5^{3}$

107171875

475
475
2375
3325
1900
225625
475
1128125
1579375
902500
107171875

§. 110.

Wenn man das eben beschriebene Verfahren, eine Cubikzahl aus allen Theilen der Wurzel zusammen zu sezen, mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so wird man leicht nachstehende Bemerkungen daraus ziehen können.

I. Der Cubus einer einzigen Ziffer kann nicht über drey Ziffern haben.

II. Von einer Zahl mit zwey Ziffern hat der Cubus zum wenigsten vier, er kann aber nicht mehr als sechs Ziffern haben.

III. Von einer Zahl, die mit vier, fünf, oder sechs Ziffern geschrieben wird, hat die Cubikwurzel weder mehr noch weniger als zwey Ziffern. Wenn man daher eine solche Zahl von der rechten Hand gegen die linke in Klassen theilt, so daß die rechte Klasse drey Ziffern, die linke aber eine, zwey, oder auch drey bekommt, so ergeben sich so viele Klassen, als die Wurzel Theile hat.

IV. Der größte Cubus, den die linke Klasse enthält, ist immer der Cubus des ersten Theils der Wurzel, auch ist dieser immer von der Ordnung der Tausender und die lezte Ziffer desselben die Nullen ungerechnet, kommt folglich an die vierte Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten nach der Linken zu, seine übrigen Ziffern aber, deren höchstens noch zwey seyn können, stehen von da an weiter nach der Linken zu.

V. Das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten Theil endigt sich, die Nullen ungerechnet, in der nächstvorhergehenden Stelle zur Rechten, oder in der dritten Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten an gegen die Linke zu, und dessen übrige Ziffern stehen gleichfalls von da weiter nach der Linken zu.

VI. Das dreyfache Product aus dem Quadrate des zweyten Theils in den ersten Theil endigt sich wieder um eine Stelle näher gegen die Rechte,

oder in der zweyten Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten an gegen die Linke zu.

VII. Die Cubikzahl des zweyten Theils der Wurzel endigt sich allemal in der Stelle der einfachen Einheiten, ohne von da an weiter nach der Rechten sich zu erstrecken.

VIII. Der Cubus einer vieltheiligen Wurzel enthält die Cubikzahlen aller Theile der Wurzel, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate jeder Summe aller vorhergehenden Theile in den nächstfolgenden, und die dreyfachen Producte aus jeder Summe aller vorhergenden Theile in das Quadrat des nächstfolgenden.

IX. Theilt man die Cubikzahl einer vieltheiligen Wurzel von der Rechten gegen die Linke in Klassen, jede zu drey Ziffern, ausgenommen die lezte, welche auch zwey oder nur eine enthalten kann, so erhält man so viele Klassen, als die Wurzel Theile hat, und mit der lezten oder niedrigsten Ziffer einer jeden Klasse endigt sich allemal eine von den Cubikzahlen der Theile der Wurzel, deren übrige Ziffern sich noch weiter nach der linken Hand zu erstrecken können.

X. In der Mitte einer jeden Klasse endigt sich allemal das dreyfache Product aus dem Quadrate der nachfolgenden Ziffern der Wurzel in alle vorhergehenden Ziffern derselben.

XI. Am Anfange einer jeden Klasse aber endigen sich die dreyfachen Producte aus dem Quadrate der vorhergehenden Ziffern in die nachfolgenden. Beyde können von da noch weiter gegen die linke Hand zu sich erstrecken.

XII. In der ersten Klasse zur Linken ist, ausser dem, was von den eben gedachten Producten in dieselbe herübergetragen worden, bloß der Cubus des ersten Theils der Wurzel enthalten; der Cubus der niedrigsten Ziffer der Wurzel aber ist immer auch der niedrigste Theil des Cubus der ganzen Zahl.

§. III.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ungehindert zur wirklichen Ausziehung der Cubikwurzel fortgehen.

Eine Zahl, aus welcher die Cubikwurzel gezogen werden soll, hat entweder nicht mehr oder sie hat mehr als sechs Ziffern.

Hat die vorgegebene Cubikzahl nicht mehr als sechs Ziffern, so hat man folgendes Verfahren zu beobachten.

I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in zwey Klassen, so daß in die rechte drey Ziffern, in die linke aber die übrigen kommen; hierauf ziehe man von der linken Klasse den größten Cubus, der darin enthalten ist, ab, und seze dessen Wurzel, als den ersten Theil, oder den Zehner, der gesuchten Cubikwurzel, in den Quotienten.

II. Zu dem nach Nro. I. gefundenen Reste ziehe man die rechte Klasse herunter, quadrire den gefundenen ersten Theil der Wurzel, nehme dieses Quadrat dreymal, und fange dieses dreyfache Quadrat unter der höchsten Ziffer der lezten Klasse zu schreiben an, so daß die übrigen Ziffern desselben von da weiter gegen die Linke zu stehen kommen.

III. Man dividire damit, die darüber stehenden Zahlen, so ist der Quotient nicht kleiner, er kann aber größer seyn als der zweyte Theil der Wurzel.

IV. Man multiplicire ihn also mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils, und das Product fange man unter der höchsten Ziffer der rechten Klasse zu schreiben an.

V. Hierauf mache man das Quadrat von dem zweyten Theile des Quotienten, multiplicire solches mit dem ersten Theile, nehme das Product dreymal, und fange es unter der mittleren Ziffer der rechten Klasse zu schreiben an.

VI. Man mache nun auch den Cubus vom zweyten Theile des Quotienten, und fange solchen unter der niedrigsten Ziffer der rechten Klasse zu schreiben an.

VII. Hierauf addire man die (nach Nro. IV — VI.) gefundenen Größen, so ist ihre Summe entweder eben so groß, oder größer, oder kleiner, als der Rest der ersten Klasse mit der zweyten zusammen genommen. Im ersten Falle ist der Quotient richtig die gesuchte Cubikwurzel. Im andern muß man den zweyten Theil des Quotienten so lange vermindern, und das Verfahren (von Nro. IV — VII.) wiederholen, bis man eine Summe bekommt, die nicht größer ist, als der gedachte Rest samt der rechten Klasse.

Im dritten Falle endlich ist die gesuchte Wurzel größer als der gefundene Quotient, aber nicht um eine ganze Einheit. Man kann folglich alsdann zwey Zahlen angeben, die nur um eins unterschieden sind, und zwischen welche die gesuchte Wurzel fällt.

110|592⟩48
64
46592

$3 \times I^2 = (48)$
$3 \times I^2 \times II = 384$
$3 \times I \times II^2 = 768$
$II^3 = 512$
46592

117|649⟩49
64
53649

$3 \times I^2 = (48)$
$3 \times I^2 \times II = 432$
$3 \times I \times II^2 = 972$
$II^3 = 729$
53649

42|875⟩35
27
15875

$3 \times I^2 = (27)$
$3 \times I^2 \times II = 135$
$3 \times I \times II^2 = 225$
$II^3 = 125$
15875

9|261⟩21
8
1261

$3 \times I^2 = (12)$
$3 \times I^2 \times II = 12$
$3 \times I \times II^2 = 6$
$II^3 = 1$
1261

§. 112.

Wenn hingegen die vorgegebene Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, mehr als sechs Ziffern hat, so verfahre man folgendermaßen:

I. Man theile die Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, so daß jede Klasse drey Ziffern enthält, bis auf die erste bey der Linken, welche auch zwey oder nur eine enthalten kann, so hat die Wurzel so viele Ziffern als man Klassen erhält.

II. Aus den beyden höchsten Klassen suche man die beyden höchsten Theile der Wurzel ganz nach der für den ersten Fall gegebenen Anweisung.

III. Zu dem, was nach Beobachtung dieser Anweisung von den beyden höchsten Klassen übrig bleibt, ziehe man die nächstfolgende Klasse herunter, betrachte nun die beyden gefundenen Ziffern des Quotienten zusammen als den ersten Theil, und die, welche man zunächst finden soll, als den zweyten Theil der Wurzel, und suche die dritte Ziffer desselben nach den für den ersten Fall gegebenen Regeln.

IV. Hat man diese gefunden, so sehe man jezt die drey gefundenen Ziffern des Quotienten zusammen als den ersten, die nun zu findende vierte aber als den zweyten Theil der Wurzel an, und suche aus den ersten drey Ziffern derselben die vierte, eben so wie man aus den ersten zwey die dritte gefunden hat, und dies Verfahren seze man so lange fort, als noch Ziffern zu finden übrig sind. Der Beweis ist für den ersten Fall in den Säzen I — VII. für den andern in den Säzen VIII — XII. des 110. §. enthalten.

9|638|375)215
8
1938
$3 \times 1^2 \equiv (12)$
$3 \times 1^2 \times 11 = 12$
$3 \times 1 \times 11^2 = 6$
$11^3 = 1$
1261
677375
$3 \times 1^2 = (1323)$
$3 \times 1^2 \times 11 = 6615$
$3 \times 1 \times 11^2 = 1575$
$11^3 = 125$
677375

485|587|656)786
343
142587
$3 \times 1^2 = (147)$
$3 \times 1^2 \times 11 = 1176$
$3 \times 1 \times 11^2 = 1344$
$11^3 = 512$
131552
11035656
$3 \times 1^2 = (18252)$
$3 \times 1^2 \times 11 = 109512$
$3 \times 1 \times 11^2 = 8424$
$11^3 = 216$
11035656

§. 113.

Daß die Wurzeln derjenigen Zahlen, welche zwischen die vollkommenen Cubikzahlen hineinfallen, oder der unvollkommenen Cubikzahlen sich niemals genau angeben lassen, kann auf dieselbe Art und durch die nämlichen Schlüsse erwiesen werden, deren wir uns oben

in §. 104. bedient haben, um dies von den Wurzeln der unvollkommenen Quadratzahlen zu zeigen; wobey abermal als bekannt vorausgesezt wird, daß man, um die Cubikzahl eines Bruchs zu erhalten, oder um einen Bruch in den Cubus zu erheben, sowohl seinen Zähler als seinen Nenner in den Cubus erheben, und daß man umgekehrt, um die Cubikwurzel eines Bruchs zu erhalten, sowohl aus seinem Zähler, als aus seinem Nenner die Cubikwurzel ausziehen müsse. Nichtsdestoweniger aber kann man auch die Wurzeln unvollkommener Cubikzahlen so genau finden, als man sie irgend nöthig haben mag, und zwar durch eine Näherungsmethode, die derjenigen, welche wir in §. 105. zur Ausziehung der Quadratwurzel aus unvollkommenen Quadratzahlen angegeben haben, ganz ähnlich, und nur darin von ihr unterschieden ist, daß hier die Nullen in Klassen, deren jede ihrer drey enthält, der unvollkommenen Cubikzahl gleich Anfangs, oder erst am Ende dem jedesmaligen Reste, angehängt werden, weil, wie man durch die Multiplication leicht finden kann, in der Cubikzahl eines Decimalbruchs von der lezten Ziffer an bis zum Orte der einfachen Einheiten immer dreymal so viel Ziffern stehen, als in der Wurzel; wo man sodann für jede angehängte Klasse Nullen eine neue Ziffer der Wurzel von den niedrigeren Ordnungen erhält. Das nämliche gilt auch von den Cubikwurzeln der Decimalbrüche, wobey man abermal das, was in §. 106. in Absicht des Theilungszeichens erinnert worden ist, in Acht zu nehmen hat.

Z. B. man verlangt die Cubikwurzel von 6321045 bis auf Hunderttheile.

6|321|045} 184,89
1

532 1

$3 \times 1^2 = (3)$
$3 \times 1^2 \times II = 24$
$3 \times I \times II^2 = 192$
$II^3 = 512$

4832

489045

$3 \times I^2 = (972)$
$3 \times I^2 \times II = 3888$
$3 \times I \times II^2 = 864$
$II^3 = 64$

397504

91541000

$3 \times I^2 = (101568)$
$3 \times I^2 \times II = 812544$
$3 \times I \times II^2 = 35328$
$II^3 = 512$

81608192

9932808000

$3 \times I^2 = (1024531 2)$
$3 \times I^2 \times II = 9220780 8$
$3 \times I \times II^2 = 449064$
$II^3 = 729$

9225272169

7075358 31

Man verlangt die Cubikwurzel von 126,52 bis auf Hunderttheile.

126,|520|5,02
125
1520

$3 \times 1^2 = (75)$

1520000

$3 \times I^2 = (7500)$

$3 \times I^2 \times II = 15000$

$3 \times I \times II^2 = 600$

$II^3 = 8$

1506008

13992

Man verlangt die Cubikwurzel von 0,0000065 in Tausendtheilchen.

0,|000|006|500|0,018
1

5500

$3 \times I^2 = (3)$

$3 \times I^2 \times II = 24$

$3 \times I \times II^2 = 192$

$II^3 = 512$

4832

668

Neunter Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen und den Logarithmen.

§. 114.

Wenn man eine stetige arithmetische Proportion fortsezt, so erhält man eine arithmetische, sezt man aber eine stetige geometrische Proportion fort, so erhält man eine geometrische Reihe, oder Progression; in jener hat also jedes Glied zum nachfolgenden einerley arithmetisches, in dieser aber einerley geometrisches Verhältniß. So ist z. B. die arithmetische Reihe, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ꝛc. ꝛc. aus der Fortsezung der arithmetischen Proportion, $1 - 3 = 3 - 5$ entstanden, indem man nämlich sezte, $1 - 3 = 3 - 5 = 5 - 7 = 7 - 9 = 9 - 11$ ꝛc. ꝛc. Die geometrische Reihe hingegen, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187 ꝛc. ꝛc. ist aus der Fortsezung der geometrischen Proportion $1 : 3 = 3 : 9$ entstanden, indem man sezte: $1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27 = 27 : 81 = 81 : 243$ ꝛc. ꝛc. Bey einer arithmetischen Reihe heißt die Differenz des ersten und zweyten Glieds die Differenz der Glieder oder der Reihe; eben so wird bey einer geometrischen Reihe der Exponent des Verhältnisses zwischen dem ersten und zweyten Gliede, der Exponent der Glieder oder der Reihe genannt. Sind die folgenden

Glieder einer Reihe größer, als die vorhergehenden, so heißt sie eine steigende, sind dagegen jene kleiner als diese, so heißt sie eine fallende. Eine steigende Reihe wird in eine fallende, und diese in jene verwandelt, wenn man sie rückwärts lieset. Lieset man eine steigende arithmetische Reihe rückwärts, und sezt sie über das erste Glied hinaus noch weiter fort, so kommt man auf negative Glieder, welche man sich als ein Fallen unter einen gewissen Punkt, so wie die positiven als ein Steigen über denselben vorstellen kann. So wird z. B. die obige arithmetische Reihe, rückwärts gelesen, in folgende verwandelt, 7, 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, — 9 — ꝛc. ꝛc. Wird hingegen eine steigende geometrische Reihe rückwärts gelesen, und über das erste Glied hinaus fortsezt, so kommt man auf Brüche, die zwar immer kleiner, aber nie = 0 werden; z. B. aus der obigen geometrischen Reihe wird die nachstehende: 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ ꝛc. ꝛc.

§. 115.

Jede arithmetische und geometrische Reihe besteht ihrer Natur nach aus unzählig vielen Gliedern, wovon man jedesmal, nach Maaßgabe der Bestimmungen einer Rechnung, eine gewisse Anzahl herausnimmt, und als die ganze Reihe, so wie das lezte derselben, als das lezte Glied der Reihe betrachtet. Wenn daher von der Summe einer Reihe die Rede ist, so versteht man allemal die Summe eines solchen Stücks derselben. In der arithmetischen Reihe bestimmen nun die Differenz der Glieder, das erste Glied, das lezte Glied, die Anzahl und die Summe aller Glieder, in der geometrischen aber die vier lezten Stücke und der Exponent der Glieder einander so, daß wenn drey derselben bekannt sind, die zwey übrigen daraus hergeleitet werden können. Dies giebt für jede Reihe zehen Aufgaben, zu deren Auflösung die Buchstabenrechnuug eben so viele Formeln giebt, die aus zwey Grundformeln, einer für das lezte Glied und einer für die Summe der Glieder abzuleiten sind. Hier kann nur die lezte dieser Aufgaben, nämlich die Aufgabe, die Summe einer Reihe zu finden, welche auch in praktischen Rechnungen am öftesten vorkommt, vorgetragen werden,

Neunter Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen und den Logarithmen.

§. 114.

Wenn man eine stetige arithmetische Proportion fortsezt, so erhält man eine arithmetische, sezt man aber eine stetige geometrische Proportion fort, so erhält man eine geometrische Reihe, oder Progression; in jener hat also jedes Glied zum nachfolgenden einerley arithmetisches, in dieser aber einerley geometrisches Verhältniß. So ist z. B. die arithmetische Reihe, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 2c. 2c. aus der Fortsezung der arithmetischen Proportion, $1 - 3 = 3 - 5$ entstanden, indem man nämlich sezte, $1 - 3 = 3 - 5 = 5 - 7 = 7 - 9 = 9 - 11$ 2c. 2c. Die geometrische Reihe hingegen, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187 2c. 2c. ist aus der Fortsezung der geometrischen Proportion $1 : 3 = 3 : 9$ entstanden, indem man sezte: $1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27 = 27 : 81 = 81 : 243$ 2c. 2c. Bey einer arithmetischen Reihe heißt die Differenz des ersten und zweyten Glieds die Differenz der Glieder oder der Reihe; eben so wird bey einer geometrischen Reihe der Exponent des Verhältnisses zwischen dem ersten und zweyten Gliede, der Exponent der Glieder oder der Reihe genannt. Sind die folgenden

Glieder einer Reihe größer, als die vorhergehenden, so heißt sie eine steigende, sind dagegen jene kleiner als diese, so heißt sie eine fallende. Eine steigende Reihe wird in eine fallende, und diese in jene verwandelt, wenn man sie rückwärts lieset. Lieset man eine steigende arithmetische Reihe rückwärts, und sezt sie über das erste Glied hinaus noch weiter fort, so kommt man auf negative Glieder, welche man sich als ein Fallen unter einen gewissen Punkt, so wie die positiven als ein Steigen über denselben vorstellen kann. So wird z. B. die obige arithmetische Reihe, rückwärts gelesen, in folgende verwandelt, 7, 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, — 9 — ꝛc. ꝛc. Wird hingegen eine steigende geometrische Reihe rückwärts gelesen, und über das erste Glied hinaus fortsezt, so kommt man auf Brüche, die zwar immer kleiner, aber nie = 0 werden; z. B. aus der obigen geometrischen Reihe wird die nachstehende: 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ ꝛc. ꝛc.

§. 115.

Jede arithmetische und geometrische Reihe besteht ihrer Natur nach aus unzählig vielen Gliedern, wovon man jedesmal, nach Maaßgabe der Bestimmungen einer Rechnung, eine gewisse Anzahl herausnimmt, und als die ganze Reihe, so wie das lezte derselben, als das lezte Glied der Reihe betrachtet. Wenn daher von der Summe einer Reihe die Rede ist, so versteht man allemal die Summe eines solchen Stücks derselben. In der arithmetischen Reihe bestimmen nun die Differenz der Glieder, das erste Glied, das lezte Glied, die Anzahl und die Summe aller Glieder, in der geometrischen aber die vier lezten Stücke und der Exponent der Glieder einander so, daß wenn drey derselben bekannt sind, die zwey übrigen daraus hergeleitet werden können. Dies giebt für jede Reihe zehen Aufgaben, zu deren Auflösung die Buchstabenrechnuug eben so viele Formeln giebt, die aus zwey Grundformeln, einer für das lezte Glied und einer für die Summe der Glieder abzuleiten sind. Hier kann nur die lezte dieser Aufgaben, nämlich die Aufgabe, die Summe einer Reihe zu finden, welche auch in praktischen Rechnungen am öftesten vorkommt, vorgetragen werden,

und wir müssen suchen, auf einem andern Wege zur Auflösung derselben zu gelangen.

§. 116.

In jeder arithmetischen Progression ist die Summe des ersten und lezten Glieds eben so groß, als die Summe je zweyer andern Glieder, die von dem ersten und lezten gleich weit entfernt sind.

Denn die Summe zweyer Größen bleibt immer die nämliche, wenn die eine derselben um eben so viel wächst, um wie viel die andere abnimmt; z. B. 20 + 4 = 19 + 5 = 18 + 6 = 17 + 7 u. s. f. Wenn man aber die Glieder einer arithmetischen Progression vorwärts vom ersten Gliede gegen das lezte zu und rückwärts vom lezten Gliede gegen das erste zu fortzählt, so wachsen die Glieder vom ersten gegen das lezte zu immer um eben so viel, als sie vom lezten gegen das erste zu abnehmen, wie man leicht übersieht, wenn man sie folgendermaßen untereinander schreibt.

$$1, \left\{\begin{matrix}1+2\\3\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}3+2\\5\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}5+2\\7\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}7+2\\9\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}9+2\\11\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}11+2\\13\end{matrix}\right\}$$

$$13, \left\{\begin{matrix}13-2\\11\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}11-2\\9\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}9-2\\7\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}7-2\\5\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}5-2\\3\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}3-2\\1\end{matrix}\right\}$$

Folglich muß in jeder arithmetischen Progression die Summe des ersten und lezten Glieds eben so groß seyn, als die Summe je zweyer andern Glieder, die von dem ersten und lezten gleich weit entfernt sind.

Schreibt man also unter eine arithmetische Progression dieselbe Progression rückwärts, und addirt alsdann die untereinander stehenden Glieder, so ist die

Summe des ersten Paars, die Summe des ersten und lezten Glieds der Reihe, die Summen aller übrigen Paare aber sind Summen je zweyer Glieder, die von dem ersten und lezten gleichweit entfernt sind, und sind mithin, nach dem vorigen, alle einander gleich; addirt man also alle diese Partialsummen, so muß eben das heraus kommen, was heraus kommt, wenn man eine derselben, also die Summe des ersten und lezten Glieds, welcher sie alle gleich siud, so vielmal nimmt, als die Anzahl aller beträgt, das heißt als die Reihe überhaupt Glieder hat. Aber durch die Addition aller dieser Partialsummen erhält man offenbar die doppelte Summe der ganzen Reihe, weil jedes Glied der Reihe unter denselben zweymal vorkommt; um also die einfache Summe der Reihe zu finden, muß man die Summe aller dieser Partialsummen, oder, welches einerley ist, das Product, welches man erhält, wenn man die Summe des ersten uud lezten Glieds mit der Anzahl aller Glieder multiplicirt, noch mit 2 dividiren.

Und hieraus fließt dann die Regel: Um die Summe einer arithmetischen Reihe zu finden, multiplicire man die Summe des ersten und lezten Glieds mit der Zahl der Glieder, und dividire das Product durch 2, so giebt der Quotient die gesuchte Summe.

Für die Summe der Reihe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

steht demnach die Rechnung also:

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 2 \\ \hline 22 \\ 10 \\ \hline 2)\ 220 \end{array}$$ 110 = Summe der geraden Zahlen von 2 bis mit auf 20.

§. 117.

Wenn man von einer geometrischen Reihe das erste und lezte Glied samt dem Exponenten weiß, so wird es nach folgenden Betrachtungen leicht seyn, aus

und wir müssen suchen, auf einem andern Wege zur Auflösung derselben zu gelangen.

§. 116.

In jeder arithmetischen Progression ist die Summe des ersten und lezten Glieds eben so groß, als die Summe je zweyer andern Glieder, die von dem ersten und lezten gleich weit entfernt sind.

Denn die Summe zweyer Größen bleibt immer die nämliche, wenn die eine derselben um eben so viel wächst, um wie viel die andere abnimmt; z. B. $20 + 4 = 19 + 5 = 18 + 6 = 17 + 7$ u. s. f. Wenn man aber die Glieder einer arithmetischen Progression vorwärts vom ersten Gliede gegen das lezte zu und rückwärts vom lezten Gliede gegen das erste zu fortzählt, so wachsen die Glieder vom ersten gegen das lezte zu immer um eben so viel, als sie vom lezten gegen das erste zu abnehmen, wie man leicht übersieht, wenn man sie folgendermaßen untereinander schreibt.

$$1, \left\{\begin{matrix}1+2\\3\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}3+2\\5\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}5+2\\7\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}7+2\\9\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}9+2\\11\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}11+2\\13\end{matrix}\right\}$$

$$13, \left\{\begin{matrix}13-2\\11\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}11-2\\9\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}9-2\\7\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}7-2\\5\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}5-2\\3\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}3-2\\1\end{matrix}\right\}$$

Folglich muß in jeder arithmetischen Progression die Summe des ersten und lezten Glieds eben so groß seyn, als die Summe je zweyer andern Glieder, die von dem ersten und lezten gleich weit entfernt sind.

Schreibt man also unter eine arithmetische Progression dieselbe Progression rückwärts, und addirt alsdann die untereinander stehenden Glieder, so ist die

Summe des ersten Paars, die Summe des ersten und lezten Glieds der Reihe, die Summen aller übrigen Paare aber sind Summen je zweyer Glieder, die von dem ersten und lezten gleichweit entfernt sind, und sind mithin, nach dem vorigen, alle einander gleich; addirt man also alle diese Partialsummen, so muß eben das heraus kommen, was heraus kommt, wenn man eine derselben, also die Summe des ersten und lezten Glieds, welcher sie alle gleich sind, so vielmal nimmt, als die Anzahl aller beträgt, das heißt als die Reihe überhaupt Glieder hat. Aber durch die Addition aller dieser Partialsummen erhält man offenbar die doppelte Summe der ganzen Reihe, weil jedes Glied der Reihe unter denselben zweymal vorkommt; um also die einfache Summe der Reihe zu finden, muß man die Summe aller dieser Partialsummen, oder, welches einerley ist, das Product, welches man erhält, wenn man die Summe des ersten und lezten Glieds mit der Anzahl aller Glieder multiplicirt, noch mit 2 dividiren.

Und hieraus fließt dann die Regel: Um die Summe einer arithmetischen Reihe zu finden, multiplicire man die Summe des ersten und lezten Glieds mit der Zahl der Glieder, und dividire das Product durch 2, so giebt der Quotient die gesuchte Summe.

Für die Summe der Reihe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

steht demnach die Rechnung also:

20
+ 2
22
10
2) 220 (110 = Summe der geraden Zahlen von 2 bis mit auf 20.

§. 117.

Wenn man von einer geometrischen Reihe das erste und lezte Glied samt dem Exponenten weiß, so wird es nach folgenden Betrachtungen leicht seyn, aus

diesen drey Stücken die Summe der ganzen Reihe herzuleiten. Es sey die Reihe, deren Summe gesucht wird, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, die unbekannte Summe bezeichne man vorläufig durch S, so ist also

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

Der Exponent dieser Reihe ist 3; multiplicirt man damit die ganze Reihe, so wird daraus

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$$

Nun hat man also ein Vielfaches der gegebenen Reihe, und zwar ein Ebensovielfaches, als in dem Exponenten derselben die Einheit enthalten ist; (hier das Dreyfache). Zieht man daher von diesem Vielfachen die einfache Reihe selbst ab, so erhält man zum Reste $3S - S = 2187 - 1$; oder, welches eben so viel ist, $(3 - 1)S = 3 \times 729 - 1$, das heißt, ein Vielfaches von der Summe der gegebenen Reihe, welches um 1 niedriger ist, als die Zahl der Einheiten in dem Exponenten derselben, oder, die Summe der gegebenen Reihe einmal weniger genommen, als in dem Exponenten derselben die Einheit enthalten ist, ist dem Producte aus dem Exponenten in das lezte Glied der Reihe, nachdem man das erste Glied von demselben (Producte) abgezogen, gleich.

Ist aber ein Vielfaches von der Summe der gegebenen Reihe diesem Producte gleich, so muß offenbar die einfache Summe selbst der ebensovielste Theil dieses Products seyn, und mithin gefunden werden, wenn man dieses Product, mit der Zahl, welche jenes Vielfache anzeigt, dividirt. Da nun diese Zahl, nach dem Obigen, der um 1 verminderte Exponent ist, so fließt hieraus die Regel:

Um die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, multiplicire man das lezte Glied mit dem Exponenten, ziehe von dem Producte das erste Glied ab, und dividire den Rest durch den um 1 verminderten Exponenten.

In der obigen Reihe ist demnach

$$S = \frac{3 \times 729 - 1}{2} = \frac{2187 - 1}{2} = \frac{2186}{2} = 1093.$$

Von diesen für die Summirung der arithmetischen und geometrischen Reihen gegebenen Regeln, wird man auch auf fallende Reihen die Anwendung ohne Schwierigkeit machen können, wenn man sich nur der in §. 114. gemachten Bemerkung erinnert, daß jede fallende Reihe els eine steigende betrachtet werden könne, wenn man sie rückwärts lieset.

§. 118.

Es kommen in dem gemeinen Leben öfters Fälle vor, wo man bey gewissen Berechnungen Anwendungen der Lehre von den arithmetischen Reihen zu machen hat. Es giebt nämlich gewisse Arbeiten, wobey die Mühe oder die Gefahr immer um etwas zunimmt, je weiter man damit kommt, und folglich auch der Lohn um einen gewissen Unterschied anwächst, so wie die Arbeit um ein gewisses fortrückt.

Aber auch ausser diesen wichtigeren Fällen giebt es noch viele andere, wo es darauf ankommt, die Summe einer arithmetischen oder geometrischen Reihe zu finden. Zur Erläuterung und Bestättigung hievon können folgende Beyspiele dienen.

I. Aufgaben von arithmetischen Reihen.

1te Aufgabe: Ein Brunnen, der auf 34 Ellen tief ausgegraben werden soll, wird also verdungen, daß man die erste Elle mit 20 Kreuzern, die zweyte mit 30 und sofort jede folgende mit 10 Kreuzern mehr, als die vorhergehende zu bezahlen verspricht; es ist die Frage was der ganze Brunnen zu graben kosten werde?

Um diese Frage zu beantworten, muß man die Summe einer arithmetischen Reihe finden, worin das erste Glied = 20, die Differenz = 10, und die Zahl der Glieder = 34 ist; Sezt man diese Progression fort bis auf das 34ste Glied, so findet man dieses = 350, und mithin (nach §. 106.) die Summe =

$$\frac{350+20}{2} \times 34 = \frac{370}{2} \times 34 = 370 \times 17$$
$$= 6290 \text{ Kreuzer} = 104 \text{ fl. } 50 \text{ Kr.}$$

2te Aufgabe: Der Giebel eines Hauses soll mit Dachsteinen gedeckt werden, so daß auf die oberste Latte 2 Steine, auf die zweyte 5, und sofort auf jede folgende 3 mehr zu liegen kommen; wenn nun der Latten in allem 20 sind, und auf die lezte 59 Steine kommen, so ist die Frage, wie viel Steine man zu dem ganzen Giebel nöthig habe?

In der Progression, deren Summe hier gesucht werden soll, ist das erste Glied = 2, das lezte = 59, die Zahl der Glieder = 20, folglich

$$S = \frac{59+2}{2} \times 20 = \frac{61}{2} \times 20 = 61 \times 10 = 610$$

3te Aufgabe: Die Summe der Glockenschläge von 1 bis 12 Uhr, bey einer Uhr, die nur die vollen Stunden schlägt, anzugeben?

Das erste Glied der Progression ist hier = 1, das lezte Glied und die Zahl der Glieder jedes = 12, demnach $S = \frac{12+1}{2} \times 12 = \frac{13}{2} \times 12 = 13 \times 6 = 78$

4te Aufgabe: Die Summe zu finden, welche Alexander von Macedonien seinen Soldaten für die Ersteigung von Petra Sogdiana bezahlen mußte, wenn man weiß, daß er den ersten Zehen von den dreyhundert Auserlesenen, welche dazu gebraucht wurden, nach der Ordnung wie sie den Gipfel ersteigen würden, folgende Belohnungen versprochen habe: Der erste sollte zehn, der zweyte neun Talente und so fort bis auf den zehnten jeder nachfolgende ein Talent weniger, als der vorhergehende, bekommen. *)

Hier gehören zusammen:

Soldaten: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Talente: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

---

*) Curtius (VII, 11.) erzählt, Alexander habe gesagt: „Praemium erit ei, qui primus occupaverit verticem, talenta X: uno minus accipiet, qui proximus ei venerit: eademque ad decem homines servabitur portio.“

Man hat also hier die Summe einer fallenden Reihe zu finden, deren erstes Glied = 10, das lezte = 1, und die Zahl der Glieder = 10 ist.

Da nun diese Reihe (nach §. 114.) einerley ist mit einer steigenden, deren erstes Glied 1, das lezte Glied und die Zahl der Glieder 10 ist, so hat man hier

$$S = 11 \times \frac{10}{2} = 11 \times 5 = 55 \text{ Talente.}$$

II. Aufgaben von geometrischen Reihen.

1te Aufgabe: Man soll angeben, wie zahlreich die Nachkommenschaft einer Hündin in 10 Jahren seyn werde, wenn dieselbe jährlich 2 Hunde und 3 Hündinnen wirft, und diese sich in der Folge zugleich mit der Mutter, und eben so, wie sie, alle Jahre vermehren, und alle Jungen das Leben behalten?

Im 1ten Jahre wirft die erste Hündin = = = = = = = 5
Im 2ten Jahre werfen 3 von diesen mit der ersten = = 4 × 5 = 20
Im 3ten Jahre werfen 12 von diesen, und 4 vom vorigen Jahre = = = = = 16 × 5 = 80
Im 4ten Jahre werfen 48 von diesen, und 16 vom vorigen Jahre = = = = = 64 × 5 = 320

u. s. w.

Man erhält also die Progression

5, 20, 80, 320 ꝛc. ꝛc.

deren erstes Glied = 5, der Exponent = 4, die Zahl der Glieder = 10 ist; hieraus findet man das lezte Glied = 1310720; und mithin erhält man (nach dem vorigen §.) die Summe der Reihe durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r} 1310720 \\ -\ 5 \\ \hline (3)\ 1310715 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 436905 \\ +\ 1310720 \\ \hline \end{array}$$

die gesuchte Summe = 1747625

2te Aufgabe: Die Anzahl der Waizenkörner anzugeben, die dem Erfinder des Schachspiels, Sessa, hätten gegeben werden müssen, um seiner Forderung Genüge zu thun. Er forderte nämlich für das 1te Feld des Schachbretts 1 Körnchen, für das 2te 2, für das 3te 4, und sofort für jedes folgende doppelt so viel als für das vorhergehende.

Da das Schachbrett 64 Felder hat, so hat man hier die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, deren erstes Glied = 1, der Exponent = 2, die Zahl der Glieder = 64 ist.

Das 64te oder lezte Glied dieser Reihe findet man kürzer, als durch fortgesextes Multipliciren, durch ein Verfahren, das im Folgenden bald näher beschrieben werden wird, = 9223372036854775808, und mithin die Summe der ganzen Reihe durch folgende Rechnung:

9223372036854775807
9223372036854775808

18446744073709551615 = Summe der Reihe, oder Anzahl der Körner.

Um einen Ueberschlag zu machen, wie viel diese Anzahl Körner nach dem jezt üblichen Maaße und Gewichte betrage, muß man die beyden lezten Aufgaben bey §. 64. zu Hülfe nehmen. Nach der ersten derselben, oder der vorlezten, gehen auf 1 englischen Scheffel 491520 Waizenkörner. Dividirt man daher mit dieser Zahl die vorhin gefundene Anzahl aller Körner, so erhält man zum Quotienten die Anzahl der Körner in Scheffeln ausgedruckt, sie ist nämlich = 37529996894754 Scheffel.

Wenn man nun sezt, man hätte dem Philosophen täglich 1 Million, also jährlich 365 Millionen Scheffel abliefern wollen, und daher die gefundene Anzahl Scheffel mit 365000000 dividirt, so zeigt der Quotient, daß dennoch 102821 Jahre dazu erfordert worden wären, die ganze Summe abzutragen.

Nach der lezten Aufgabe bey §. 64 gehen auf 1 englische Cubikmeile 137639643428 englische Scheffel;

dividirt man also mit dieser Zahl die oben gefundene Anzahl Scheffel, welche der Anzahl aller Körner gleich ist, so zeigt der Quotient, daß alle diese Körner, wenn sie an einem Orte aufgeschüttet werden könnten, einen Raum von mehr als 272 englischen Cubikmeilen einnehmen würden.

3te Aufgabe: Den Preis eines Pferds zu finden, welches so bezahlt werden sollte, daß man für den ersten Hufnagel einen Kreuzer, für den zweyten zwey Kreuzer und sofort für jeden folgenden doppelt so viel, als für den vorhergehenden gäbe.

Da jedes Hufeisen acht Nägel hat, so ist hier die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, deren erstes Glied 1, der Exponent 2 und die Zahl der Glieder 32 ist.

Man findet daher, nach der eben erwähnten Methode, das lezte Glied dieser Reihe $= 2147483648$ und hieraus die Summe der Reihe durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r} 2147483648 \\ 2147483647 \\ \hline 4294967295 \end{array} = \text{Summe der Reihe, oder Anzahl der Kreuzer, welche, in Gulden ausgedrückt, giebt } 71582788\tfrac{1}{4} \text{ fl.}$$

§. 119.

In der arithmetischen Reihe ist die Differenz des ersten und lezten Glieds die Differenz der Reihe so vielmal genommen, als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält.

Dies wird sogleich einleuchtend seyn, wenn wir nur die Reihe: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ꝛc. ꝛc. wiederum eben so betrachten, wie wir (in §. 116.) gethan haben, und sie auch so schreiben, nämlich:

$$1, \left\{\begin{matrix} 1+2 \\ 3 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 3+2 \\ 5 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 5+2 \\ 7 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 7+2 \\ 9 \end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix} 9+2 \\ 11 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 11+2 \\ 13 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 13+2 \\ 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 15+2 \\ 17 \end{matrix}\right\} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Betrachtet man diese Reihe so, wie sie da steht, so fällt es sogleich in die Augen, daß jedes Glied derselben aus dem vorhergehenden, und der Differenz besteht; z. B. das vierte aus dem dritten und der Differenz, das dritte aus dem zweyten und der Differenz, das zweyte aus dem ersten und der Differenz. Da sich nun solchergestalt alle vorhergehenden Glieder endlich auf das erste zurückführen lassen, zu welchem in jedem nachfolgenden Gliede die Differenz einmal weiter hinzukommt, nämlich zum ersten unter den nachfolgenden, oder zum zweyten Gliede der Reihe, einmal, zum zweyten unter den nachfolgenden, oder zum dritten der Reihe zweymal u. s. w., so besteht eigentlich jedes Glied der Reihe aus dem ersten, und der Differenz so vielmal genommen, als die Zahl, welche seine Stelle nach dem ersten anzeigt, die Einheit enthält, und mithin besteht das lezte Glied der Reihe aus dem ersten und der Differenz so vielmal genommen, als die Zahl aller Glieder nach dem ersten die Einheit enthält.

Zieht man daher von dem lezten Gliede das erste ab, so muß die Differenz der Glieder so vielmal genommen, als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält, übrig bleiben. Folglich ist in der arithmetischen Reihe u. s. w.

§. 120.

In der geometrischen Reihe ist der Exponent des Verhältnisses zwischen dem ersten und lezten Gliede die sovielste Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl der Glieder nach dem ersten anzeigt.

Schreibt man die Reihe: 1, 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. ꝛc. folgendermaßen:

$$1, \left\{\begin{matrix} 1 \times 2 \\ 2 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1 \times 2 \times 2 \\ 1 \times 2^2 \\ 4 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 1 \times 2^3 \\ 8 \end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 1 \times 2^4 \\ 16 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 1 \times 2^5 \\ 32 \end{matrix}\right\}$$

ꝛc. ꝛc.

so sieht man sogleich, daß jedes Glied derselben ein Product aus dem vorhergehenden in den Exponenten der Reihe ist, z. B. das vierte ein Product aus dem dritten in den Exponenten, das dritte ein Product aus dem zweyten in den Exponenten, das zweyte ein Product aus dem ersten in den Exponenten. Da sich nun solchergestalt alle vorhergehenden Glieder am Ende auf das erste zurückführen lassen, zu welchem in jedem folgenden Gliede der Exponent einmal weiter als Factor hinzukommt, nämlich im ersten unter den nachfolgenden, oder im zweyten Gliede der Reihe einmal, im zweyten unter den nachfolgenden, oder im dritten Gliede der Reihe zweymal (als Factor) oder seine zweyte Potenz u. s. w., so ist eigentlich jedes Glied der Reihe ein Product aus dem ersten, und einer eben so hohen Potenz des Exponenten, als die Zahl, welche seine Stelle nach dem ersten anzeigt, die Einheit enthält. Das lezte Glied der Reihe ist demnach ein Product aus dem ersten in eine eben so hohe Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl aller Glieder nach dem ersten die Einheit enthält. Da man nun (nach §. 42.) durch die Division einer Größe mit einer andern den Exponenten des geometrischen Verhältnisses beyder Größen findet, und da man, wenn man ein Product mit einem seiner Factoren dividirt, zum Quotienten den andern Factor erhält, so ist, wenn man das lezte Glied einer geometrischen Reihe mit dem ersten dividirt, der Quotient die ebensovielste Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält, und dieser Quotient ist der Exponent des Verhältnisses des ersten Glieds zum lezten. Folglich ist in der geometiischen Reihe u. s. w.

§. 121.

In der arithmetischen Reihe haben je zwey Glieder, die gleichweit von einander abstehen, einerley arithmetisches Verhältniß; und umgekehrt: wenn zwey Glieder dasselbe arithmetische Verhältniß haben, wie zwey andere, so stehen jene eben so weit von einander ab, als diese.

Denn da (nach §. 119.) jedes Glied der arithmetischen Reihe aus dem ersten und der Differenz so viel-

mal genommen, als die Zahl seiner Stelle nach dem ersten anzeigt, besteht, und mithin die Differenz in jedem nachfolgenden Gliede einmal weiter enthalten ist, als im vorhergehenden, so sind je zwey Glieder der arithmetischen Reihe, die gleichweit von einander abstehen, um gleiche Vielfache der Differenz unterscheiden, oder ihre Differenzen sind gleiche Vielfache von der Differenz der Reihe, folglich einander gleich, uud mithin ist es auch ihr arithmetisches Verhältniß, das durch diese bestimmt wird. (§. 42.)

Es ist leicht, für den umgekehrten Saz diese Schlüsse umzukehren.

Zum Beyspiele können die Glieder 5 und 13, 9 und 17 der Reihe in §. 119. dienen.

§. 122.

In einer geometrischen Reihe haben je zwey Glieder, die gleichweit von einander abstehen, einerley geometrisches Verhältniß; und umgekehrt: wenn zwey Glieder einerley geometrisches Verhältniß haben, wie zwey andere, so stehen jene so weit von einander ab, als diese.

Denn da (nach §. 120.) jedes Glied der geometrischen Reihe ein Product aus dem ersten Gliede in eine eben so hohe Potenz des Exponenten ist, als die Zahl seiner Stelle nach dem ersten anzeigt, und mithin in jedem nachfolgenden Gliede der Exponent einmal weiter als Factor, oder eine um 1 höhere Potenz desselben vorkommt, als im vorhergehenden, so sind die Exponenten der Verhältnisse je zweyer Glieder, die gleichweit von einander abstehen, gleiche Potenzen von dem Exponenten der Reihe, folglich einander gleich, und mithin sind es auch die Verhältnisse, die durch diese bestimmt werden.

Für den umgekehrten Saz ist der Beweis leicht aus diesem herzuleiten.

Zum Beyspiele nehme man die Glieder 2 und 16; 4 und 32 der Reihe in §. 120.

§. 123.

Aus den beyden vorigen §. §. folgt nun, daß wenn man eine arithmetische und eine geometrische Reihe zusammenstellt, und die Glieder, welche in beyden einerley Stelle haben, als zusammengehörige betrachtet, die Glieder der geometrischen Reihe geometrisch proportionirt seyen, wenn die mit ihnen zusammengehörigen Glieder der arithmetischen Reihe arithmetisch proportionirt sind, und daß umgekehrt die Glieder der arithmetischen Reihe arithmetisch proportionirt seyen, wenn die ihnen zugehörigen Glieder der geometrischen Reihe geometrisch proportionirt sind.

Man verbinde z. B. eine arithmetische und eine geometrische Reihe folgendermaßen miteinander,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ꝛc. ꝛc.

so ist in jener $1 - 4 = 5 - 8$; und in dieser $2 : 16 = 32 : 256$.

Ferner giebt jede Zahl der arithmetischen Reihe die Potenz an, auf welche der Exponent der geometrischen Reihe erhoben werden muß, um den Exponenten des Verhältnisses zwischen 1 und dem zu jener Zahl gehörigen Gliede der geometrischen Reihe zu erhalten, oder, welches einerley ist, sie giebt an, aus wie vielen einfachen Verhältnissen, jedes so groß als das Verhältniß des ersten Glieds zum zweyten, das Verhältniß zwischen dem ersten und dem zu jener Zahl gehörigen Gliede der geometrischen Reihe zusammengesezt sey. (§. 57.) Z. B. die Zahl 6 zeigt an, daß das Verhältniß 1 : 64 die sechste Potenz des Exponenten 2 der geometrischen Reihe zum Exponenten habe; oder, daß das Verhältniß 1 : 64 aus sechs einfachen Verhältnissen, jedes so groß als das Verhältniß 1 : 2 zusammengesezt sey, also:

$$2 : 64 = \left\{ \begin{array}{r} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \\ 16 : 32 \\ 32 : 64 \end{array} \right\}$$

Endlich zeigt auch der Unterschied zweyer Zahlen der arithmetischen Reihe die Potenz des Exponenten der geometrischen Reihe an, welche der Exponent des Verhältnisses der mit jenen Zahlen zusammengehörigen Glieder der geometrischen Reihe ist, oder, was eben so viel ist, die Differenz zweyer Zahlen der arithmethischen Reihe zeigt an, aus wie vielen einfachen Verhältnissen, jedes so groß, als das Verhältniß des ersten Glieds zum zweyten, das Verhältniß der zu jenen Zahlen gehörigen Glieder der geometrischen Reihe zusammengesezt ist. Z. B. 5, als der Unterschied der Zahlen 3 und 8 zeigt an, daß das Verhältniß 8 : 256 die fünfte Potenz des Exponenten 2 der geometrischen Reihe zum Exponenten habe, und mithin dem Verhältnisse 1 : 32 gleich sey, oder daß das Verhältniß 8 : 256 aus fünf einfachen Verhältnissen, jedes so groß, als das Verhältniß 1 : 2, zusammengesezt sey: also:

$$8 : 256 = 1 : 32 = \left\{\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \\ 16 : 32 \end{array}\right\}$$

Und eben aus dieser Ursache heissen die Zahlen der arithmetischen Reihe die Logarithmen (von λογων ἀριθμοι) d. h. Verhältnißzähler der mit ihnen zusammengehörigen Zahlen der geometrischen Reihe.

§. 124.

Man sieht indessen bald, daß alle Vortheile, die man sich etwa von einer solchen Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Reihe für den Gebrauch versprechen dürfte, eben nicht weit reichen würden, so lange diese Reihen die Gestalt behielten, unter welcher wir sie im vorigen § aufgeführt haben. Denn da die geometrische Reihe sehr schnell anwächst, und ihre Lücken sich immer mehr und mehr erweitern, je weiter sie fortgesezt wird, so vermißt man in derselben immer mehrere von den Zahlen, die in Rechnungen am häufigsten vorkommen; und für alle Zahlen, die in der geometrischen Reihe nicht stehen, hat auch die arithme-

tische keine Logarithmen. Man gedenke sich aber nun zwischen je zwey Gliedern der arithmetischen Reihe eine mittlere arithmetische, und zwischen je zwey Gliedern der geometrischen Reihe eine mittlere geometrische Proportionalzahl, so hat man eine aus den Hauptreihen durch Einschalten entstandene neue arithmetische und geometrische Reihe. In jener ist die Differenz die Hälfte von der Differenz der Hauptreihe, in dieser ist der Exponent die Quadratwurzel aus dem Exponenten der Hauptreihe. Wiederholt man nun bey diesen neuen Reihen das nämliche Verfahren, und sezt man solches so lange fort, bis man in der geometrischen Reihe alle ganze Zahlen von 1 bis etwa auf 10000 oder noch weiter, mit einem gewissen Grade von Genauigkeit, findet, so erhält man, wenn man aus den berechneten Gliedern der geometrischen Reihe die ganze Zahlen, und solche, die man wegen eines unmerklichen Fehlers dafür annehmen kann, herauszieht, und jeder ihren zugehörigen Logarithmen neben beyschreibt, einen logarithmischen Canon, dessen großen Nuzen bey vielen Berechnungen wir bald durch einige Beyspiele werden kennen lernen.

§. 125.

Die Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Reihe, in welchen man aber zwischen je zwey Gliedern eine unbestimmt große Anzahl Mittelglieder gedenken muß, heißt ein logarithmisches System. Die geometrische Reihe fängt allemal mit 1, und die arithmetische mit 0 an. Das zweyte Glied der geometrischen Hauptreihe, dessen Logarithme = 1 gesezt wird, heißt die Grundzahl des Systems, weil durch sie das ganze System bestimmt wird (§. 123.). Da nun dieses Glied ganz willkührlich ist, so lassen sich unzählig viele logarithmischen Systeme gedenken. Unter allen aber vereinigt das sogenannte gemeine logarithmische System in Absicht auf den Gebrauch die meisten Vorzüge in sich. Mit diesem Namen bezeichnet man folgendes:

0,	1,	2,	3,	4,	5 ꝛc.
1,	10,	100,	1000,	10000,	100000 ꝛc.

Die zwischen je zwey Glieder dieser beyden Hauptreihen hineinfallenden zusammengehörigen mittleren

Proportionalglieder hat man auf dem im vorigen §. beschriebenen höchst mühsamen Wege bis auf die zehnte Decimalstelle gefunden und in größen Tafeln neben einander verzeichnet, welche solchergestalt die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 101000 enthalten. Aus diesen wurden in der Folge die kleineren abgekürzten Tafeln gezogen, in welchen die Logarithmen nur bis zur siebenten Decimalstelle, und nur für die ganzen Zahlen von 1 bis 10000 zu finden sind.

§. 126.

Da (nach dem vorigen §.) in dem gemeinen logarithmischen Systeme alle Glieder der geometrischen Hauptreihe Potenzen der Zahl 10, d. h. Einheiten höherer Ordnungen sind, und da der Log. von 1 = 0, der Log. von 10 = 1, der Log. von 100 = 2, der Log. von 1000 = 3 ist u. s. w. so enthält der Logarithme eines jeden Glieds der Hauptreihe eben so viele Einheiten, als die Zahl, welche die Ordnung dieses Glieds unter den höheren bezeichnet. Da ferner der Logarithme von 1 = 0, und der Logarithme von 10 = 1 ist, so müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10 größer als 0, und kleiner als 1, folglich Brüche von der Form 0,..... seyn. Aus gleichem Grunde müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10 und 100 größer als 1, und kleiner als 2, folglich Brüche von der Form 1,....., die Logarithmen aller Zahlen zwischen 100 und 1000 größer als 2, und kleiner als 3, folglich Brüche von der Form 2,..... seyn, u. s. w.

Demnach sind also in dem gemeinen logarithmischen Systeme die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen zwey nächste Glieder der Hauptreihe fallen, gemischte, d. h. aus ganzen Zahlen und Decimalbrüchen bestehende Ausdrücke, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithme des nächstvorhergehenden Glieds der Hauptreihe, und mithin immer so groß ist, als die Anzahl der Ziffern vor den Einern, oder der Ziffern von den höheren Ordnungen, in der dem Logarithmen zugehörigen Zahl. Weil man solchergestalt an dieser Zahl sogleich erkennen kann, zwischen welche zwey

Glieder der Hauptreihe die einem gegebenen Logarithmen zugehörige Zahl falle, so hat man sie die Kennziffer oder Charakteristik genannt. Die der Kennziffer anhangenden Decimalziffern führen den Namen Mantisse oder Zugabe, und zeigeu an, das wievielste Glied der eingeschalteten Reihe die dem Logarithmen zugehörige Zahl sey. Z. B. wenn man 999 Glieder zwischen den zwey nächsten Gliedern der Hauptreihe, 1000 und 10000 einschaltet, so ist 8492 das 929ste derselben so nahe, daß an der völligen Schärfe nur 1 Hunderttausendtheilchen fehlt.

§. 127.

Wenn man die beyden Hauptreihen des gemeinen logarithmischen Systems (§. 125.) rückwärts fortsezt, so kommt man nach (§. 114.) auf folgende Reihen, welche von der Rechten gegen die Linke zu gelesen werden müssen:

2c. 2c.	— 6,	— 5,	— 4,	— 3,	— 2,	— 1
2c. 2c.	$\frac{1}{1000000}$,	$\frac{1}{100000}$,	$\frac{1}{10000}$,	$\frac{1}{1000}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{10}$

Demnach sind alle Glieder der rückwärts fortgesezten geometrischen Hauptreihe Brüche, deren Zähler die Einheit, und deren Nenner Potenzen der Zahl 10 d. h. Einheiten höherer Ordnungen sind; mithin sind diese Brüche selbst Einheiten niedrigerer Ordnungen. (§. 83.) Da nun der Logarithme von $\frac{1}{10} = -1$, der Logarithme von $\frac{1}{100} = -2$, der Logarithme von $\frac{1}{1000} = -3$ ist, u. s. w. so enthält der Logarithme eines jeden Glieds der rückwärts über das erste Glied hinaus fortgesezten Hauptreihe eben so viele negative Einheiten, als die Zahl, welche die Ordnung des Nenners dieses Glieds unter den höheren bezeichnet, positive Einheiten enthält.

Da ferner der Logarithme von $1 = 0$, und der Logarithme von $\frac{1}{10} = -1$ ist, so müssen die Logarithmen aller zwischen 1 und $\frac{1}{10}$ fallenden Brüche, zwischen 0 und — 1 fallen, folglich Brüche von der Form $-0,\ldots\ldots\ldots$ seyn. Aus gleichem Grunde müssen die Logarithmen aller zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$ fallenden Brüche, zwischen — 1 und — 2, die Logarith-

men aller zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ fallenden Brüche, zwischen — 2 und — 3 fallen, und mithin die ersteren die Form — 1, ... , die lezteren hingegen die Form — 2, ... haben. Demnach sind also in dem gemeinen logarithmischen Systeme die Logarithmen aller Brüche, welche zwischen zwey nächste Glieder der (rückwärts fortgesezten) Hauptreihe fallen, negative gemischte Ausdrücke, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithme des nächstvorhergehenden Glieds der Hauptreihe, und mithin immer so groß ist, als die Zahl, welche die Ordnung der höchsten Ziffer im Nenner des dem Logarithmen zugehörigen Bruchs anzeigt.

§. 128.

Aus den beyden vorigen §§. fließen nun folgende Säze:

I. Die Decimalbrüche haben mit den ihnen correspondirenden ganzen Decimalzahlen einerley Logarithmen, nur mit dem negativen Zeichen. Z. B. man drücke den Logarithmen einer Zahl durch das ihr vorgesezte Zeichen Log. aus, so ist

Log. 100 = 2; Log. 0,01 = — 2
Log. 1000 = 3; Log. 0,001 = — 3 u. s. w.

II. Der Logarithme eines jeden Glieds der Hauptreihe enthält eben so viele positive oder negative Einheiten, als in diesem Gliede Nullen nach oder vor der Einheit stehen; und umgekehrt, in jedem Gliede der Hauptreihe stehen eben so viele Nullen nach oder vor der Einheit, als der zu diesem Gliede gehörige Logarithme positive oder negative Einheiten enthält. Hiebey wird vorausgesezt, daß die Glieder der rückwärts fortgesezten Hauptreihe, deren Logarithmen (nach dem vorigen §.) negativ sind, in Decimalbrüchen ausgedrückt seyen. Z. B.

Log. 100000 = 5; Log. 0,00001 = — 5
oder umgekehrt:
5 = Log. 100000; — 5 = Log. 0,00001

III. Die Kennziffer des Logarithmen einer jeden Zahl wird durch die Ordnung der höchsten Ziffer dieser

Zahl, und umgekehrt, die Ordnung der höchsten Ziffer einer jeden Zahl wird durch die Kennziffer des zu ihr gehörigen Logarithmen bestimmt. Z. B.

In der Zahl 53792,846 ist die höchste Ziffer (5) von der vierten höheren Ordnung, daher die Kennziffer des zu dieser Zahl gehörigen Logarithmen = 4.

In der Zahl 0,0000642 ist die höchste Ziffer (6) von der fünften niedrigeren Ordnung, daher die Kennziffer des zu ihr gehörigen Logarithmen = — 5.

IV. Jeder Logarithme gehört zu unzählig vielen Zahlen, die zwar alle mit einerley Ziffern geschrieben werden, in welchen aber die höchste Ziffer immer von einer andern Ordnung ist, wenn nur, nach Maßgabe dieser Veränderung auch seine Kennziffer abgeändert wird. Z. B. zu den Zahlen 6354; 635,4; 63,54; 6,354; 0,6354; 0,06354; 0,006354 u. s. w. gehört einerley Logarithme, nur daß seine Kennziffer nach der Ordnung dieser Zahlen 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3 wird. Auch umgekehrt gilt dieser Saz, wie die vorigen.

§. 129.

Da (nach §. 123.) die Logarithmen arithmetisch proportionirt sind, wenn die ihnen zugehörigen Zahlen geometrisch proportionirt sind; und da (nach §. 145.) in der arithmetischen Proportion das vierte Glied der um das erste Glied verminderten Summe der beyden mittleren gleich ist; so findet man den Logarithmen des vierten Glieds einer geometrischen Proportion, wenn man die Logarithmen des zweyten und dritten addirt, und von dieser Summe den Logarithmen des ersten Glieds abzieht. Sucht man hierauf den gefundenen Logarithmen in der arithmetischen Reihe auf, so steht neben ihm in der geometrischen Reihe das zu ihm gehörige vierte Glied der geometrischen Proportion.

Hieraus folgt also, daß man die Logarithmen in allen Fällen gebrauchen könne, in welchen man die Regel de Tri anzuwenden pflegt. Da man nun ein Product als die vierte Proportionalzahl zu 1 und

zu den beyden Factoren, einen Quetienten hingegen als die vierte Proportionalzahl zum Divisor, Dividendus und zu 1 ansehen kann; so ist also der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der Factoren, und der Logarithme eines Quotienten die Differenz der Logarithmen des Divisors und Dividendus; denn der Logarithme von 1 wird immer = 0 gesezt, weil die 0 beym Addiren uud Subtrahiren eben so wenig eine Veränderung macht, als 1 bey dem Multipliciren und Dividiren. Hieraus erhellet also, wie die Logarithmen das Multipliciren in ein Addiren, und das Dividiren in ein Subtrahiren verwandeln. Da ferner (nach §. 94.) das Quadrat ein Product aus zwey gleichen Factoren, der Cubus ein Product aus drey gleichen Factoren ist; so ist der Logarithme eines Quadrats das Doppelte, der Logarithme eines Cubus das Dreyfache von dem Logarithmen der Wurzel, und folglich umgekehrt der Logarithme der Quadratwurzel die Hälfte von dem Logarithmen des Quadrats, und der Logarithme der Cubikwurzel ein Drittheil vom Logarithmen des Cubus. Da nun dieselben Gründe auf ähnliche Art bey allen höheren Potenzen und Wurzeln Statt finden, so erhält man im Allgemeinen den Logarithmen einer Potenz von jedem beliebigen Grade, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, und man erhält den Logarithmen einer Wurzel von jedem beliebigen Grade, wenn man den Logarithmen der Potenz von dem nämlichen Grade mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. So erhellet also, wie die Logarithmen das Erheben auf Potenzen in ein Multipliciren und das Ausziehen der Wurzeln in ein Dividiren verwandeln.

§. 130.

Zur Uebung im Gebrauche der Tafeln können folgende Aufgaben dienen.

I. Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen 1251, 3753, 2421 die vierte Proportionalzahl mittelst der Logarithmen zu finden.

Log. 3753 = 3,5743786
+ Log. 2421 = 3,3839948

6,9583734
Log. 1251 = 3,0972573

3,8611161 = Log. 7263.

II. Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen, 365 und 24, mittelst der Logarithmen in einander zu multipliciren.

Log. 365 = 2,5622929
+ Log. 24 = 1,3802112

3,9425041 = Log. 8760.

III. Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen 8950 und 358 in einander, die größere nämlich durch die kleinere, mittelst der Logarithmen zu dividiren.

Log. 8950 = 3,9518230
— Log. 358 = 2,5538830

1,3979400 = Log. 25.

IV. Aufgabe. Eine gegebene Zahl, 76, logarithmisch in das Quadrat zu erheben.

Log. 76 = 1,8808136
2

3,7616272 = Log. 5776.

V. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl 3364, logarithmisch die Quadratwurzel auszuziehen.

Log. 3364 = 3,5268560

$\frac{3,5268560}{2}$ = 1,7634280 = Log. 58.

VI. Aufgabe. Eine gegebene Zahl, 17, logarithmisch in den Cubus zu erheben

Log. 17 = 1,2304489
3

3,6913467 = Log. 4913.

VII. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl 9261, logarithmisch die Cubikwurzel auszuziehen.

$$\text{Log. } 9261 = 3{,}9666579$$

$$\frac{3{,}9666759}{3} = 1{,}3222193 = \text{Log. } 21.$$

§. 131.

Wenn ein, bey einer solchen Rechnung gefundener, Logarithme von einem Logarithmen der Tafeln nur in der lezten Decimalziffer unterschieden ist, so darf man ohne Bedenken für den erstern die dem leztern zugehörige Zahl nehmen. Stimmt aber ein Logarithme mit einem Logarithmen der Tafeln nicht in den ersten sechs Decimalziffern überein, sondern weicht von dem lezteren etwa schon in der vierten oder fünften Stelle ab, so ist dies eine Anzeige, daß die solchem Logarithmen zugehörige Zahl von derjenigen, welche dem ihm am nächsten kommenden Logarithmen der Tafeln zugehört, noch um einige Decimalbrüche unterschieden, d. h. grösser oder kleiner sey, als jene, je nachdem der gegebene Logarithme größer oder kleiner ist, als der ihm am nächsten kommende Logarithme der Tafeln.

Es wird in der Folge gezeigt werden, wie man auch in solchen Fällen die gesuchte Zahl so genau finden könne, als zu der jedesmaligen Absicht erforderlich ist.

§. 132.

Da (nach §. 17. Nro I.) jeder Bruch als ein Quotient betrachtet werden kann, welcher entsteht, wenn man den Zähler des Bruchs durch seinen Nenner dividirt, so ist vermöge §. 129 der Logarithme eines Bruchs die Differenz, um welche der Logarithme seines Zählers den Logarithmen seines Nenners übertrift.

Nun sind alle Brüche entweder ächte, oder unächte; und nur bey den lezteren ist der Zähler größer als der Nenner, nur bey diesen übertrift also auch der Logarithme des Zählers den Logarithmen des Nenners, und der leztere kann folglich vom ersteren abgezogen werden. Bey allen ächten Brüchen hingegen ist der

Zähler kleiner als der Nenner, und mithin wird auch der Logarithme des ersteren vom Logarithmen des lezteren übertroffen. Will man also die Differenz beyder haben, so muß man den Logarithmen des Zählers vom Logarithmen des Nenners abziehen. Weil man nun solchergestalt das Entgegengesezte von dem thun muß, was man eigentlich (nach §. 129.) thun sollte, um die Differenz der beyden Logarithmen zu bekommen, indem nicht, wie dort vorausgesezt wird, der Zähler den Nenner übertrift, sondern umgekehrt der erstere vom lezteren übertroffen wird, so ist dies ein neuer Grund, dem Logarithmen eines ächten Bruchs das negative Zeichen vorzusezen.

Auch mit den Decimalbrüchen müßte man aus denselben Gründen auf dieselbe Art verfahren; man müßte ihnen nämlich den Nenner geben, den die Zahl der vorhandenen Decimalstellen erfordert (§. 83.), sodann vom Logarithmen dieses Nenners den Logarithmen des Zählers abziehen, und der Differenz das negative Zeichen vorsezen.

Allein, da die Tafeln keine negativen Logarithmen enthalten, und nur für ganze Zahlen berechnet sind, so pflegt man, um jederzeit einen positiven Logarithmen zu erhalten, entweder diese Subtraction bloß anzuzeigen, oder, wenn man sie wirklich verrichten will, dem Zähler einige Einheiten, gewöhnlich 10, zu leihen, hierauf den Logarithmen des Nenners abzuziehen, und dem Reste die geliehenen Einheiten mit dem negativen Zeichen anzuhängen. Eben so verfährt man auch in allen übrigen Fällen, wo bey logarithmischen Rechnungen ein größerer Logarithme von einem kleineren abzuziehen ist. Da man nun dem kleineren Logarithmen so viele Einheiten leihen kann, als man will, indem man sie auf der andern Seite gleich wieder davon wegnimmt, so erhellet hieraus, daß ein solchergestalt ausgedrückter Logarithme unzählige Formen erhalten könne. Z. B.

Man verlangt den Logarithmen von $\frac{7}{8}$; so ist

$$\begin{aligned} \text{Log. } 8 &= 0{,}9030900 \\ -\ \text{Log. } 7 &= \underline{0{,}8450980} \\ \text{demnach Log. } \tfrac{7}{8} &= -\ 0{,}0579920 \end{aligned}$$

oder es ist

Log. 7 = 10,8450980 — 10
— Log. 8 = 0,9030900
mithin Log. $\frac{7}{8}$ = 9,9420080 — 10

Man verlangt den Logarithmen von 0,4458, so ist

Log. 10000 = 4,0000000
— Log. 4458 = 3,6491401
Log. 0,4458 = — 0,3508599

oder

Log. 4458 = 13,6491401 — 10
— Log. 10000 = 4,0000000
Log. 0,4458 = 9,6491401 — 10

oder

Log. 4458 = 3,6491401
— Log. 10000 = 4,0000000
Log. 0,4458 = — 1,6491401

oder

Log. 4458 = 3,6491401
— Log. 10000 = 4,0000000
Log. 0,4458 = 3,6491401 — 4

das ist

Log. 0,4458 = 0,6491401 — 1, u.
eben so ist Log. 0,04458 = 0,6491401 — 2
Log. 0,004458 = 0,6491401 — 3 u. s. w.

Demnach kann man für die Logarithmen der Decimalbrüche auch noch folgende Regel festsezen:

Der Logarithme eines Decimalbruchs wird gefunden, wenn man den zu den Ziffern desselben, als einer ganzen Zahl betrachtet, gehörigen Logarithmen in den Tafeln aufsucht, diesem zur Kennzifffer eine 0 giebt, und ihm hinten so viele Einheiten mit dem negativen Zeichen anhängt, als der gegebene Decimalbruch vorne Nullen hat.

Der Grund davon ist aus §. 127. 128. Nro II. leicht einzusehen.

§. 133.

Da bey Rechnungen, die nur einigermaßen ins Große gehen, nothwendig sehr oft Zahlen vorkommen

müssen, die größer, als 10000 sind, so würde der Gebrauch der gemeinen logarithmischen Tafeln sehr eingeschränkt seyn, wenn man nicht Mittel hätte, zu einer gegebenen Zahl, die nicht mehr in den Tafeln enthalten ist, den zugehörigen Logarithmen, und zu einem Logarithmen, der nicht in den Tafeln enthalten ist, die zugehörige Zahl zu finden. Die Verfahrensart, deren man sich in diesen beyden Fällen zu bedienen hat, um das Gesuchte zu erhalten, ist es also, was wir jezt kennen lernen müssen, um in den Stand gesezt zu werden, den Gebrauch der Tafeln, so weit, als es die wesentliche Einrichtung derselben verstattet, zu erweitern.

Hiezu wird uns nun die Bemerkung den Weg bahnen, daß bey großen Zahlen die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der ihnen zugehörigen Zahlen beynahe proportionirt sind. Z. B.

Log. 9996 = 3,9998262
Log. 9995 = 3,9997828
Differenz = 0,0000434

Log. 9997 = 3,9998697
Log. 9995 = 3,9997828
Differenz = 0,0000869

Eben so ist

Log. 9999 = 3,9999566
Log. 9998 = 3,9999131
Differenz = 0,0000435

Log. 9999 = 3,9999566
Log. 9997 = 3,9998697
Differenz = 0,0000869

Nämlich die Differenz der Zahlen 9995 und 9996 ist = 1; die Differenz ihrer Logarithmen = 434; die Differenz der Zahlen 9995 und 9997 ist = 2, die Differenz ihrer Logarithmen = 2 × 434 + 0,0000001. Eben so ist die Differenz der Zahlen 9998 und 9999 = 1, die Differenz ihrer Logarithmen = 435; hingegen die Differenz der Zahlen 9999 und 9997 ist = 2, und die Differenz ihrer Logarithmen = 2 × 435 — 0,0000001.

Die Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen, die um 2 unterschieden sind, ist also beynahe das Doppelte von der Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind, indem der Fehler in beyden vorigen Beyspielen nicht mehr, als 1 Zehnmillionentheilchen beträgt, welches das einemal zu viel, das anderemal zu wenig ist. Dies ist zwar freylich nur bey 7 Decimalstellen, bis auf welche die Logarithmen in den kleineren Tafeln berechnet sind, richtig; allein man braucht auch bey den meisten Rechnungen nicht mehrere Decimalstellen der Logarithmen. Folglich kann man bey allen Rechnungen, für welche man sich mit 7 Decimalstellen der Logarithmen begnügen kann, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, annehmen, daß die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der Zahlen, zu welchen sie gehören, proportionirt seyen.

§. 134.

Soll demnach zu einer Zahl, die größer, als 10000, aber kleiner, als 10000000 ist, der Logarithme gefunden werden, so verfahre man folgendermaßen:

I. Man schneide von der gegebenen Zahl die ersten vier Ziffern linker Hand ab, und seze den Logarithmen dieser aus den Tafeln heraus.

II. Nun seze man auch den Logarithmen welcher der um 1 größeren Zahl zugehört, heraus, und ziehe von ihm den kleineren (Nro I.) ab.

III. Die von der gegebenen Zahl rechter Hand abgeschnittenen Ziffern betrachte man als Decimalstellen, so sind sie folglich nicht $= 1$, sondern einem Bruche gleich, dessen Zähler eben diese Ziffern, und dessen Nenner die Einheit mit so vielen Nullen ist, als die Anzahl dieser Ziffern beträgt (§. 83.).

Da man nun nach Nro II. die Differenz der Logarithmen hat, welche der abgeschnittenen ganzen Zahl, und derjenigen, die um 1 größer ist, als sie, zugehören, so kann man hieraus, vermöge des vorigen §.

diejenige logarithmische Differenz finden, welche dem eben erwähnten Decimalbruche zugehört.

IV. Zu dem Ende seze man folgende Proportion an:

Wie sich verhält 1 (als die Differenz der abgeschnittenen ganzen Zahl und der nächstgrößeren) zu dem abgeschnittenen Decimalbruche, so verhält sich die gefundene logarithmische Differenz (welche der Differenz 1 der ganzen Zahlen zugehört) zu der gesuchten, (welche dem abgeschnittenen Decimalbruche zugehört.)

V. Hat man das vierte Glied dieser Proportion auf die gewöhnliche Art gefunden, so addire man solches zu dem Logarithmen der abgeschnittenen Zahl, so, daß nur gleichnamige Decimalstellen zu gleichnamigen hinzukommen, die aber außer diesen etwa noch übrigen weggelassen werden.

VI. Weil man aber nicht den Logarithmen der abgeschnittenen Zahl mit einem Decimalbruche, sondern den Logarithmen dieser Zahl, als einer ganzen betrachtet, haben will, so müssen zur Kennziffer des nach den bisherigen Vorschriften gefundenen Logarithmen noch so viele Einheiten addirt werden, als man anfänglich Decimalstellen abgeschnitten hat.

Denn soll aus der abgeschnittenen ganzen Zahl mit dem anhangenden Decimalbruche nur eine ganze Zahl werden, so kann dies nur dadurch geschehen, daß man sie mit einer Zahl multiplicirt, welche aus der Einheit mit so vielen angehängten Nullen besteht, als die Anzahl der abgeschnittenen Decimalziffern beträgt, indem eben diese Zahl der Nenner des abgeschnittenen Decimalbruchs ist. Diese Multiplication aber wird logarithmisch durch die Addition verrichtet (§. 129). Da nun der Logarithme einer Zahl, die aus der Einheit mit einer gewissen Anzahl Nullen besteht, allemal eine ganze Zahl ist, die so viele Einheiten enthält, als in jener Zahl selbst Nullen nach der Einheit stehen, (§. 127. Nro II.) und da dieser Nullen gerade so viele sind, als in der gegebenen Zahl Decimalstellen abgeschnitten wurden (§. 83.), so ist offenbar, daß man,

um den Logarithmen der gegebenen Zahl als einer ganzen Zahl betrachtet, zu erhalten, zu dem nach den Vorschriften Nro. I bis V gefundenen Logarithmen so viele Einheiten addiren müsse, als man anfänglich in der gegebenen Zahl Decimalstellen abgeschnitten hat. Z. B.

Man verlangt den Logarithmen der Zahl 473842, so ist die Rechnung folgende:

Log. 4739 = 3,6756867
Log. 4738 = 3,6755951
Log. Differenz = 0,0000916

1 : 0,42 = 0,0000916 : G

G = 0,0000916 × 0,42 = 0,0000384|72

Log. 4738 = 3,6755951
+ 384
3,6756335
+ 2
Log. 473842 = 5,6756335

Für den Logarithmen der Zahl 3567894 stehet die Rechnung also:

Log. 3568 = 3,5524248
Log. 3567 = 3,5523031
Log. Differenz = 0,0001217

1 : 0,894 = 0,0001217 : G

G = 0,0001217 × 0,894 = 0,0001087|998

Log. 3567 = 3,5523031
+ 1087
3,5524118
+ 3
Log. 3567894 = 6,5524118

§. 135.

Soll zu einem gegebenen Logarithmen, der sich nicht genau in den Tafeln findet, die zugehörige Zahl gefunden werden, so ist solcher entweder allein in der

Kennziffer, oder allein in den Decimalstellen, oder in beyden zugleich von einem Logarithmen der Tafel unterschieden. Ist der gegebene Logarithme allein in der Kennziffer von einem Logarithmen der Tafeln unterschieden, so hat er entweder eine größere, oder eine kleinere Kennziffer als dieser leztere. Um die einem solchen Logarithmen zugehörige Zahl zu erhalten, muß die Zahl, welche dem in den Decimalstellen mit ihm übereinstimmenden Logarithmen der Tafeln zugehört, mit einer eben so hohen Potenz der Zahl 10 im ersten Falle multiplicirt, im andern dividirt werden, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmen entweder mehr oder weniger Einheiten enthält, als die Kennziffer des Logarithmen der Tafeln, der in den Decimalstellen mit dem gegebenen übereinstimmt. Z. B. wenn der Logarithme 7,8835479 gegeben ist, so finden sich seine Decimalziffern genau in den Tafeln unter der Charakteristik 3, und unter dieser Charakteristik gehört dazu die Zahl 7648. Hier aber haben diese Decimalziffern die Kennziffer 7, die um 4 Einheiten grösser ist als 3. Folglich muß die Zahl 7648, welche diesen Decimalstellen unter der Kennziffer 3 zugehört, noch mit der vierten Potenz von 10, d. i. mit 10000 multiplicirt werden, und es ist mithin

$$7{,}8835479 = \text{Log. } 76480000$$

Eben so finden sich die Decimalziffern des Logarithmen 1,6698745 unter der Kennziffer 3, unter welcher die Zahl 4676 dazu gehört. Da nun die Kennziffer 1 um 2 Einheiten kleiner ist als 3, so muß die Zahl 4676 noch mit der 2ten Potenz von 10, d. i. mit 100 dividirt werden, und es ist folglich

$$1{,}6698745 = \text{Log. } 46{,}76$$

Kommt hingegen der gegebene Logarithme in den Decimalstellen mit keinem Logarithmen der Tafeln überein, so hat man, wie auch immer seine Kennziffer beschaffen seyn mag, um die zu ihm gehörige Zahl zu finden, folgendes Verfahren zu beobachten:

I. Man suche unter der Kennziffer 3 ein Paar Logarithmen, zwischen welche die Decimalstellen des gegebenen fallen, und ziehe den kleineren derjel-

ben von dem größeren ab, so hat man die Differenz der Grenzen des gegebenen Logarithmen, deren zugehörige Zahlen nur um 1 unterschieden sind.

II. Hierauf ziehe man von dem gegebenen Logarithmen den nächstkleineren Logarithmen der Tafeln ab, ohne auf die Charakteristik beyder zu sehen, so hat man die Differenz der zwey nächsten Logarithmen, welche wir, der Kürze wegen, die Differenz der Nächsten nennen wollen;

III. Nun seze man die Proportion an:

Wie sich verhält die Differenz der Grenzen zur Differenz der Nächsten, so verhält sich 1 zu der gesuchten Zahl.

IV. Nachdem man das vierte Glied dieser Proportion nach den gewöhnlichen Regeln gefunden, so hänge man solches der zu dem nächstkleineren Logarithmen gehörigen Zahl als einen Decimalbruch an;

V. Nun vergleiche man die Kennziffer des gegebenen Logarithmen mit der Kennziffer 3 der Grenzen desselben (Nro I.); Ist jene dieser gleich, so ist die nach Nro. IV. gefundene Zahl selbst die dem gegebenen Logarithmen zugehörige; ist aber jene größer oder kleiner als diese, so muß die nach Nro IV. gefundene Zahl noch mit einer eben so hohen Potenz der Zahl 10 im ersten Falle multiplicirt, im andern dividirt werden, als die Differenz der beyderseitigen Kennziffern Einheiten enthält.

Z. B. man verlangt die Zahl, welche dem Logarithmen 6,6973884 zugehört, so ist die Rechnung folgende:

nächstgrößerer Logarithme	=	3,6974037
nächstkleinerer Logarithme	=	3,6973165
Differenz	=	872
gegebener Logarithme	=	6,6973884
nächstkleinerer Logarithme	=	3,6973165
Differenz	=	719

Demnach hat man die Proportion:

$$872 : 719 = 1 : G$$

und hieraus $G = \frac{719}{872}$

Hängt man nun dem Zähler dieses Bruchs einige Nullen an, und verrichtet alsdann die Division, so erhält man den Quotienten, wie folgt:

872) 719,000 (0,824
607 6
---
21 40
17 44
---
3 960
3 488

472

Es ist also $G = 0{,}824$

Hängt man nun diesen Decimalbruch der Zahl 4981, welche dem nächstkleineren Logarithmen zugehört, an, so erhält man 4981,824. Allein da die Kennziffer des nächstkleineren Logarithmen, der zu der Zahl 4981 gehört, nur 3, die Kennziffern des gegebenen Logarithmen aber 6, folglich die leztere um 3 Einheiten größer ist, als die erstere, so muß die zulezt gefundene Zahl noch mit der 3ten Potenz von 10 d. h. mit 1000 multiplicirt, oder, was eben so viel ist, es muß in derselben das Decimalzeichen um 3 Stellen nach der rechten Hand zu gerückt werden, und die gesuchte Zahl ist mithin 4981824.

Wäre die Kennziffer des gegebenen Logarithmen 4, so wäre die zugehörige Zahl 49818,24; wäre jene 5, so wäre diese 498182,4; wäre aber jene 7, so wäre diese 49818240. Denn da man (nach §. 133.) auf diesem Wege die gesuchte Zahl jedesmal nur bis auf 7 Ziffern richtig finden kann, so muß, so oft die Kennziffer eines gegebenen Logarithmen für die ihm zugehörige Zahl mehr, als 7 Ziffern erfordert, der Abgang derselben durch Nullen ersezt werden. Hiernach kann man auch jedesmal die Anzahl der Nullen, welche dem Zähler des nach Nro IV. erhaltenen Bruchs ange-

hängt werden muß, um den Quotienten bis auf so viele Ziffern zu erhalten, als die Charakteristik des gegebenen Logarithmen für die gesuchte Zahl fordert, voraus bestimmen. So findet man z. B. für den Logarithmen 9,3669223 die Zahl 2327674000.

§. 136.

Wenn eine Zahl, deren Logarithme gesucht werden soll, und in den kleinen Tafeln nicht mehr zu finden ist, sich in Factoren zerfällen läßt, deren Logarithmen in den Tafeln anzutreffen sind, so findet man den gesuchten Logarithmen, wo nicht kürzer, doch genauer, als nach §. 134, wenn man diese Zerfällung der gegebenen Zahl vornimmt, und die Logarithmen aller ihrer Factoren addirt, deren Summe alsdann den gesuchten Logarithmen giebt (§. 129.) Z. B.

Man verlangt den Logarithmen der Zahl 196668; diese Zahl hat zu Factoren die Zahlen 36, und 5463; es ist aber

Log. 36 = 1,5563025
Log. 5436 = 3,7374312
folglich 5,2937337 = Log. 196668.

Die im vorigen §. gefundene Zahl 4981824 hat zu Factoren die Zahlen 4961; und 1296; nun ist

Log. 4 = 0,6020600
Log. 961 = 2,9827234
Log. 1296 = 3,1126050
folglich 6,6973884 = Log. 4981824,

genau so, wie er im vorigen §. gegeben war.

§. 137.

Um zu einer gemischten Zahl den zugehörigen Logarithmen zu finden, verwandle man entweder den der ganzen Zahl angehängten Bruch in einen Decimalbruch, hänge ihr solchen wiederum an, und betrachte nun die vier höchsten Ziffern der ganzen Zahl mit dem angehängten Decimalbruche als Ganze, führe sodann die Rechnung nach §. 134, und bestimme am Ende die

Kennziffer nach Maaßgabe der in der vorgegebenen Zahl enthaltenen Ganzen; oder, man verwandle die gegebene gemischte Zahl in einen unächten Bruch, und verfahre alsdann nach §. 132. Z. B.

Man verlangt den Logarithmen von $97382\frac{3}{4}$; da $97382\frac{3}{4} = 97382{,}75$; so ist die Rechnung (nach §. 134.) folgende:

Log. 9739 = 3,9885144
— Log. 9738 = 3,9884698
Differenz = 0,0000446

demnach

1 : 0,275 = 0,0000446 : G

mithin G = 0,0000122

Log. 9738 = 3,9884698
+ 122
3,9884820
+ 1
folglich 4,9884820 = Log. 97382,75

Nach §. 132. aber stehet die Rechnung also:

Es ist $97382\frac{3}{4} = \frac{389531}{4}$

Nun ist

Log. 3896 = 3,5906189
Log. 3895 = 3,5905075
Differenz = 0,0001114

demnach

1 : 0,31 = 0,0001114 : G

folglich G = 0,0000345

Log. 3895 = 3,5905075
+ 345
3,5905420
+ 2
5,5905420
— Log. 4 = 0,6020600
mithin = 4,9884820 = $97382\frac{3}{4}$

wiederum genau so, wie nach der ersteren Art.

§. 138

Ist ein negativer Logarithme gegeben, und es soll die ihm zugehörige Zahl gefunden werden, so ist diese

ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner die dem gegebenen Logarithmen, als positiv betrachtet, zugehörige Zahl ist.

Verlangt man aber die gesuchte Zahl in Form eines Decimalbruchs, so bringe man zuerst den negativen Logarithmen nach §. 132. auf eine solche Form, daß er an der Stelle der Kennziffer eine Nulle bekomme, und rückwärts so viele negative Einheiten bey sich führe, als seine negative Kennziffer erfordert, hierauf suche man nach §. 135. die seinen Decimalziffern, als positiv betrachtet, zugehörige Zahl, und seze dieser so viele Nullen vor, als die dem Logarithmen rückwärts angehängte negative Zahl Einheiten enthält; von diesen Nullen schneide man endlich die erste durch das Decimalzeichen ab, so erhält man die gesuchte Zahl in Form eines Decimalbruchs. Die Gründe dieses Verfahrens sind aus §. 127. 128. Nro II. leicht einzusehen. Z. B.

Man verlangt die Zahl, welche dem Logarithmen — 7,6756335 zugehört so ist die Rechnung diese:

nächst größerer Logarithme = 3,6756867
nächst kleinerer Logarithme = 3,6755951

Differenz = 916

gegebener Logarithme = 7,6756335
nächst kleinerer Logarithme = 3,6755951

Differenz = 384

Demnach

$$916 : 384 = 1 : G$$

und hieraus $G = 0{,}419$

Folglich ist die Zahl, welche dem Logarithmen, als positiv betrachtet zugehört, 47384190, und mithin der Bruch, der ihm als einem negativen Logarithmen zugehört $\frac{1}{47384190}$.

Verlangt man diesen Bruch sogleich in Form eines Decimalbruchs, so verwandle man den gegebenen Logarithmen auf folgende Art in einen positiven:

$$\begin{array}{r} +\ 8{,}0000000 - 8 \\ -\ 7{,}6756335 \\ \hline 0{,}3243665 - 8 \end{array}$$

Nun suche man für diesen Logarithmen, als positiv betrachtet, die zugehörige Zahl, wie folgt:

nächst größerer Logarithme = 3,3244882
nächst kleinerer Logarithme = 3,3242825

Differenz = 2057

gegebener Logarithme = 0,3243665
nächst kleinerer Logarithme = 3,3242825

Differenz = 840

Demnach

3057 : 840 = 1 : G

und hieraus G = 0,408

Folglich die verlangte Zahl = 2110408; sezt man nun dieser 8 Nullen vor, wie die dem Logarithmen angehängte Zahl — 8 fordert, und schneidet man alsdann die erste derselben durch das Decimalzeichen ab, so erhält man den gesuchten Decimalbruch 0,00000002110408, von dessen Richtigkeit man sich leicht versichern kann, wenn man den durch das erstere Verfahren gefundenen Bruch nach den gewöhnlichen Regeln in einen Decimalbruch verwandelt.

Eben so findet man auch

— 3,6253124 = Log. $\frac{1}{4220}$ = Log. 0,0002369661

Hieraus erhellet zugleich, daß man Logarithmen, die zwar eine positive Kennziffer haben, aber rückwärts eine negative Zahl bey sich führen, zuerst auf die Kennziffer 0 reduciren, und alsdann auf die eben gezeigte Art behandeln müsse. So ist z. B.

2,5450224 — 5 = 0,5450224 — 3 = Log. $\frac{1}{5307,699}$ =
Log. 0,0035077

§. 139.

Was die Logarithmen negativer Zahlen betrifft, so muß man dabey unterscheiden, ob der Logarithme bloß als Erleichterungsmittel der Zahlenrechnung, oder ob er, wie bey höheren Rechnungen oft geschiehet, als eine Größe eigener Art in irgend einer Verbindung mit andern Größen, vorkommt. Im ersten Falle ist der

Logarithme unbedingt möglich, und mit dem Logarithmen eben dieser Zahl, als positiv genommen, einerley; denn das negative Zeichen beziehet sich alsdann bloß auf den bey Einleitung der Rechnung angenommenen Fall, der durch Veränderung der Zeichen in einen andern ähnlichen verwandelt worden ist. Wird also die Rechnung diesem ursprünglich angenommenen Falle, durch gehörige Abänderung der Bedingungen, angepasset, so verwandelt sich die negative Größe in eine positive. Im andern Falle hingegen ist ein solcher Logarithme nur unter der Bedingung möglich, wenn er das Verhältniß einer negativen Zahl, als positiv genommen, zur positiven Einheit angiebt. Da man aber bey allen Rechnungen die positive Einheit zum Grunde legt, folglich wenn vom Logarithmen einer negativen Zahl die Frage ist, eigentlich den Logarithmen verstehen muß, der das Verhältniß einer negativen Zahl zur positiven Einheit angeben soll, so muß man unter dieser Einschränkung, sagen, daß, wenigstens im gemeinen Systeme, die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich seyen. Denn eine unmögliche Größe ist ein, aus Merkmalen, die einander aufheben, zusammengesezter Begriff, eine ungereimte Antwort des Calculs auf eine ungereimte Frage, wodurch man etwas sucht, was durch das Angenommene bereits ausgeschlossen ist. Da nun das gemeine logarithmische System nur für positive Zahlen eingerichtet ist, so müssen wir nothwendig auf solche Ausdrücke gerathen, sobald wir, in der zulezt angegebenen Bedeutung, Logarithmen negativer Größen suchen.

§. 140.

Zu einem Beyspiele von einem gedoppelten vortheilhaften Gebrauche der Logarithmen kann die oben (§. 118. II.) gegebene Aufgabe von dem Erfinder des Schachspiels dienen.

Zur Auflösung derselben hat man die 64te Potenz der Zahl 2 nöthig. Da nun (nach §. 129.) der Logarithme einer Potenz gefunden wird, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, so ist

$$\text{Log. } 2^{64} = 64 \times \text{Log. } 2 = 19{,}2659200$$

Zu diesem Logarithmen findet man nach §. 135. die Zahl 18 446740 000 000 000 000.

Daß schon in der 8ten Stelle die Nullen anfangen, kommt daher, weil man nach §. 135. die zu einem Logarithmen gehörige Zahl nicht weiter als bis auf 7 Ziffern richtig finden kann, wie auch daselbst erinnert worden ist. Größere Tafeln würden die Zahl genauer geben. Wer aber keine solche hat, und doch die 64te Potenz von 2 genau so, wie wir sie oben angegeben, zu finden wünschte, den können die Logarithmen noch auf einem andern Wege dazu führen der zwar nicht so leicht, wie der vorige, aber doch viel leichter und bequemer, als der Weg des fortgesezten Multiplicirens ist. Wenn wir nämlich die beyden Hauptreihen des oben (§. 123.) betrachteten logarithmischen Systems noch einmal vor uns nehmen:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c. &c.

so sehen wir bald, daß jedes nachfolgende Glied der arithmetischen Reihe die Summe, und jedes nachfolgende Glied der geometrischen Reihe das Product einiger vorhergehenden Glieder derselben Reihe ist. Nehmen wir nun dazu den Saz, daß der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der Factoren ist (§. 129), und verbinden wir noch damit die oben schon gemachte Bemerkung, daß alle Glieder der geometrischen Reihe Potenzen der Zahl 2 enthalten, deren Exponenten die zugehörigen Glieder der arithmetischen Reihe, oder die Logarithmen sind, so ergiebt sich der Schluß leicht, daß jede beliebige Potenz der Zahl 2 vermittelst ihres Exponenten aus einem Paare, oder auch nur aus einer einzigen der vorhergehenden niedrigeren gefunden werden könne, ohne daß man nöthig hätte, erst alle vorhergehenden zu suchen.

Vermöge der eben angeführten Säze ist nämlich jeder Exponent oder Logarithme die Summe einiger, oder das Doppelte eines, vorhergehenden niedrigeren. Da nun jeder Logarithme, der die Summe einiger andern ist, zu einer Zahl gehört, oder auf eine Zahl Anzeige thut, die ein Product ist, das diejenige Zahlen zu Factoren hat, welche den summirenden Zahlen des

Logarithmen zugehören, oder worauf jene Anzeige thun; so erhellet, daß jede beliebige Potenz der Zahl 2 gefunden werden könne, wenn man die den summirenden Zahlen des Exponenten dieser Potenz zugehörigen Zahlen der geometrischen Reihe in einander multiplicirt. Z. B. Man verlangt die 6te Potenz von 2, so ist

$$6 = \left\{\begin{matrix} 1+2+3 \\ 1+5 \\ 2+4 \\ 3+3 \end{matrix}\right\} \text{ und daher } 2^6 = \left\{\begin{matrix} 2\times4\times8 \\ 2\times32 \\ 4\times16 \\ 8\times8 \end{matrix}\right\} = 64$$

Soll also die 64te Potenz von 2 gefunden werden, und die geometrische Reihe geht nicht weiter, als bis zur 8ten Potenz dieser Zahl, so suche man auf die eben beschriebene Art zuerst aus der 8ten Potenz 16te, hierauf aus dieser die 32te und endlich aus der 32ten die 64te, wie folgt:

$2^8 = 256$
$2^{16} = 65536$
$2^{32} = 4294967296$
$2^{64} = 18446744073709551616$

Zehnter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 141.

Wir sind in mehreren der vorigen Abschnitte, namentlich in dem Abschnitte von den Verhältnissen und Proportionen, in dem von den Quadrat- und Cubikzahlen und in dem von den Reihen und Logarithmen in den Fall gekommen, daß uns der Gebrauch gewisser allgemeinerer Zeichen, als unsere Ziffern sind, zum Bedürfnisse ward, um den Beweisen der Säze diejenige Allgemeinheit zu geben, welche das Wesen einer reinen Vernunftwissenschaft schlechterdings erfordert. Wir haben uns zu dieser Absicht theils der Anfangsbuchstaben der Wörter, womit die Begriffe bezeichnet werden, welche die Hauptbestandtheile unserer Säze ausmachten, theils der römischen Ziffern I, II, III ꝛc. ꝛc. als charakteristischer Zeichen bedient, indem wir z. B. das gesuchte Glied einer Proportion durch G, den Exponenten durch E, die Summe einer Reihe durch S, das erste Glied einer Proportion durch I, das dritte durch III; den ersten Theil von einer zweytheiligen Wurzel durch I, den zweyten durch II u. s. w. ausgedrückt haben, und dadurch, daß wir mit diesen Zeichen die Veränderungen der Addition, Subtraction u. s. w. eben so, wie mit den Ziffern selbst, vornahmen, ist es uns gelungen, den Beweisen die erforderliche Allgemeinheit zu verschaffen. Dies ist aber auch alles, was

sich mit diesen Zeichen ausrichten lässet, und weiter reicht ihre Anwendung nicht. Sobald es daher darauf ankommt, vielseitigere Verwickelungen der Größen überhaupt und der räumlich ausgedehnten ins Besondere in Untersuchung zu nehmen, so ist man genöthiget, sich nach noch allgemeineren Zeichen derselben umzusehen, die uns in den Stand sezen können, vermittelst der symbolischen Construction Säze und Beweise in einer solchen Allgemeinheit abzufassen, wie es dem Geiste und den Bedürfnissen der Wissenschaft gemäß ist.

Eins der einfachsten Beyspiele davon geben, unter vielen andern, die oben (§. 115.) erwähnten Aufgaben von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 142.

Zu diesem Gebrauche konnte man nun keine schicklicheren Zeichen finden, als die Buchstaben des Alphabets, welche man gegen das Ende des sechzehnten Jahrhunderts dazu gewählt, und seitdem beständig beybehalten hat.

Die wichtigsten Vorzüge welche den Gebrauch der Buchstaben, als Zeichen der Größen, empfehlen, sind folgende:

1) Ihre große Einfachheit, woran sie den Ziffern nichts nachgeben.

2) Ihre leichte Unterscheidbarkeit, welche sie ebenfalls mit den Ziffern gemein haben.

3) Ihre geringe Anzahl, welche, obgleich sie etwas mehr, wie doppelt so groß, als jene der Ziffern ist, doch gegen die unendliche Mannigfaltigkeit der Größen und der Combinationen von diesen, zu deren Bezeichnung sie zureichen, ganz verschwindet.

4) Ihre alles umfassende Allgemeinheit, vermöge welcher sie

(a) zu Bezeichnung aller Arten von Größen, der zählbaren, wie der räumlich ausgedehnten und dieser wie der intensiven —

(b) zu Bezeichnung aller gedenkbaren Arten der Entstehung und Veränderung der Größen, gleich tauglich sind. So kann z. B. $a + b = \int$ jede Summe, $a - b = d$ jede Differenz, $ma = p$ jedes Product, $\frac{a}{n} = q$ jeden Quotienten, a^m jede Potenz, $\sqrt[n]{a^m}$ jede Wurzel u. s. w. bezeichnen.

5) Ihre gleiche Tauglichkeit zu Bezeichnung der unbekannten und der bekannten Größen, ohne Gefahr, die einen mit den andern zu verwechseln. Diesen wichtigen Vortheil, welcher der Rechnung mit Buchstaben eigenthümlich ist, und von dessen Werthe man sich schon dadurch eine Vorstellung machen kann, wenn man die Menge der Wörter betrachtet, welche erforderlich sind, um die in dem Begriffe des gesuchten Glieds nur bey einer zur zusammengesezten Regel de Tri gehörigen, Aufgabe vereinigten Merkmale gehörig zu bezeichnen, und der Aufmerksamkeit gegenwärtig zu erhalten, wovon Seite 117 ein Beyspiel giebt, hat man durch das einfache Mittel sich zu verschaffen gewußt, daß man zur Regel gemacht hat, zu Bezeichnung der unbekannten Größen nur die Endbuchstaben, zu Bezeichnung der bekannten aber die übrigen Buchstaben des Alphabets vom Anfange an zu gebrauchen.

6) Ihre vorzügliche Tauglichkeit, mehr die gegenseitigen Beziehungen der Größen und die Abhängigkeit der einen von der andern, als deren Quantität, auszudrücken. Dieser unschäzbare Vortheil sezt uns in den Stand eine unzählbare Menge ähnlicher Fälle unter einem einzigen allgemeinen Ausdrucke zusammenzufassen, und auf ihm beruhet hauptsächlich der große Werth und der ausgebreitete Nuzen der Buchstabenformeln.

Als die vereinigte Wirkung aller dieser Vortheile haben wir es anzusehen, daß der Gebrauch der Buchstaben, als Zeichen der Größen, uns die Untersuchung versteckter Wahrheiten ganz unbeschreiblich erleichtert, indem er es uns möglich macht

(a) mehrere lange Säze, zu deren vollständiger Ausdrückung wir sehr viele Worte nöthig haben würden, durch wenige einfache Zeichen zugleich darzustellen.

(b) den Sinnen, der Einbildungskraft und dem Gedächtnisse ihre Dienste bey den Arbeiten des Geistes so ganz zu erlassen, daß dieser, von ihnen unabhängig, ohne um die Sachen, womit er es eigentlich zu thun hat, sich zu bekümmern, und bloß an die einfachen Zeichen derselben sich haltend, die längsten Schlußreihen mit der größten Schnelligkeit durchlaufen und die verstecktesten Verhältnisse der Größen mit gleicher Leichtigkeit wie die einfachsten enthüllen kann.

Auf solche Art wird der Calcul einer Maschine ähnlich, deren Gebrauch uns der Nothwendigkeit, auf alle einzelnen Theile der Arbeit beständig unsere Aufmerksamkeit zu richten, überhebt, und wenn wir sie nur nach den einmal erlernten Regeln behandeln, uns immer zu einem sichern Resultate führt, ohne daß wir nöthig hätten, uns dessen bewußt zu seyn, was während der Operation vorgeht.

§. 143.

Zu dieser Stufe der Vollkommenheit wurde die Rechnung mit Buchstaben, ausser dem Gebrauche der Zeichen der arithmetischen Operationen, hauptsächlich durch ein gedoppeltes Mittel erhoben, nämlich

1) durch die geschickte Verbindung der Ziffern mit den Buchstaben;

2) durch Einführung der entgegengesezten Größen in die Rechnung.

Zu der Wahl dieser beyden Mittel wurde man durch die Unbestimmtheit geleitet, in welcher die Buchstaben-Symbole die Quantität der durch sie ausgedrückten Größen lassen.

Da nämlich diese Symbole an sich selbst gar nichts bedeuten, und eben dadurch geschickt sind, jede Größe, die wir wollen, zu bezeichnen, so können wir sie nicht gebrauchen, um auch bestimmte Vielfache oder Theile, bestimmte Potenzen oder Wurzeln der durch sie bezeichneten Größen auszudrücken. Dazu bleiben uns also unsere Ziffern unentbehrlich, und ihr

Gebrauch ist in Ansehung der Potenzen und Wurzeln hier ganz derselbe, wie bey der Rechnung mit bloßen Zahlen, nach §. 94. So bedeutet z. B. a^5 die fünfte Potenz von a; $\sqrt[3]{z}$ die Cubikwurzel aus z u. s. w.

Auch in Ansehung der Vielfachen und Theile der durch Buchstaben ausgedrückten Größen ist der Gebrauch der Ziffern dem ganz ähnlich den man bey den Vielfachen und Theilen der durch Zahlen ausgedrückten Größen von ihnen macht sobald man die Multiplicationen und Divisionen nicht wirklich vornimmt, sondern nur durch die gehörigen Zeichen andeutet, wovon in den vorigen Abschnitten viele Beyspiele vorgekommen sind, und der Unterschied besteht bloß darin, daß man eine Ziffer welche ein Vielfaches oder einen Theil von einer durch Buchstaben ausgedrückten Größe andeutet, der lezteren, weil die Auslassung des Multiplicationszeichens hier keine Irrung veranlassen kann, unmittelbar vorsezt z. B. $3f$, $\frac{5}{8}p$ u. s. w. (von welcher Art des Gebrauchs auch in §. 117. schon ein Beyspiel vorgekommen ist,) und daß eine solche Ziffer hier, auf das mit ihr verbundene Buchstabenzeichen bezogen, ein Coefficiente von diesem genannt wird, statt daß sie dort, auf das Product bezogen, ein Factor des lezteren genannt wurde.

Die Ziffern und Buchstaben, als Zeichen der zählbaren Größen, sind also keineswegs so von einander unterschieden, daß jene der Zahlenrechnung, diese der Buchstabenrechnung ausschließend angehörten wie man eben durch diese Benennungen zu glauben leicht verleitet werden könnte, sondern beyde sind gleichmäßig dazu bestimmt, um in Verbindung mit einander bey jeder Rechnungsaufgabe gebraucht zu werden, bey welcher die Bedingungen von der Art sind, daß die Aufgabe ohne Hülfe der Buchstaben entweder gar nicht aufgelöset werden kann, oder daß doch die Rechnung durch Anwendung der Buchstaben leichter oder allgemeiner wird. Die Ziffern sind besondere, die Buchstaben allgemeine Namen der Größen; beyde zusammen machen die Elemente der Rechnungssprache aus. Diese Sprache hat ihre eigenen Regeln, die man aus ihrer Grammatik kennen lernen muß, welcher es zu-

kommt, den Gebrauch dieser Elemente zu zeigen, ihre verschiedenen Bedeutungen festzusezen, und ihre Syntaxe durch Beyspiele zu erläutern. Eben diese Grammatik der Rechnungssprache macht daher den ersten Theil der bisher sehr unschicklich sogenannten Buchstabenrechenkunst aus. So wenig man die Chemie deßwegen in die nasse und trockene eintheilen kann, weil sie bey ihren Untersuchungen über die Körper theils flüssiger Auflösungsmittel, theils des, wie man sich ehemals vorgestellt hat, nicht flüssigen Auflösungsmittels des Feuers sich bedient, eben so wenig kann man die Arithmetik deßwegen in die Zahlen- und Buchstaben-Rechenkunst eintheilen, weil sie bey ihren Untersuchungen über die zählbaren Größen theils der Ziffern als besonderer, theils der Buchstaben, als allgemeiner Zeichen jener Größen, sich bedient; und so wenig die Chemie ihre Untersuchungen über die Körper zu einiger Vollständigkeit bringen könnte, wenn sie sich dabey bloß an die Zerlegungen auf dem nassen, oder an die auf dem trockenen Wege halten wollte, eben so wenig könnte die Arithmetik ihre Untersuchungen über die zählbaren Größen zu einiger Vollständigkeit bringen, wenn sie sich dabey ausschliessend auf den Gebrauch der Ziffern oder der Buchstaben beschränken wollte. Die möglichen Veränderungsarten der durch Ziffern und Buchstaben ausgedrückten Größen machen also in unzertrennlicher Verbindung mit einander den Gegenstand der Wissenschaft von den Eigenschaften und Verhältnissen der zählbaren Größen aus, welcher man den Namen der Arithmetik füglich lassen kann.

Außerdem sind die Namen der Zahlen- und Buchstaben-Rechenkunst, welche aus Zeiten herrühren, wo sie für eine Sammlung auswendig gelernter Regeln und kunstmäßiger Handgriffe nicht übel gewählt waren, einer demonstrativen Wissenschaft, wie unsere Arithmetik jezt ist, ganz unwürdig.

§. 144.

Die Unbestimmtheit der Buchstabensymbole hat auf gleiche Weise auch zu Einführung der entgegenge-

sezten Größen in die Arithmetik einen Anlaß gegeben, welcher der Mathematik der Alten gänzlich fehlte.

Wenn wir z. B. die Differenz der Zahlen 9 und 5 angeben sollen, so werden wir uns nie einfallen lassen, diese durch Neun weniger Fünf auszudrücken, sondern weil wir fünf Einheiten von neun Einheiten wirklich wegnehmen können, und wir wissen, daß wenn wir das thun, vier Einheiten übrig bleiben, so werden wir sagen, die Differenz der Zahlen 9 und 5 sey 4. Sollen wir hingegen die Differenz der zählbaren Grösen a und b angeben, so ist dies nicht anders möglich, als dadurch, daß wir diese Differenz bloß vermittelst des Subtractionszeichens andeuten, welches wir zwischen die beyden Größen so sezen, daß die, welche man als die größere ansieht vorangeht, und die kleinere nachfolgt, also a — b, wenn a für die grössere angenommen wird. Sind nun a und b veränderliche Größen, und a nimmt ab, während b nicht abnimmt, so muß, sobald a kleiner wird, als b die Differenz a — b subtractiv werden. Ein deutliches Beyspiel davon haben wir an dem oben (§. 90.) gefundenen Geseze, nach welchem bey der Division von Decimalbrüchen der Ort des Decimalzeichens in dem Quotienten bestimmt wird. Sezt man nämlich die Entfernung des Decimalzeichens von der lezten Ziffer des Quotienten = d, die Anzahl der Decimalziffern des Divisors = m, die des Dividendus = n, so läßt sich dieses Gesez durch die allgemeine Formel ausdrücken d = m — n.

Ist nun in einem gegebenen Falle m = 4, nnd n = 7, so wird d = — 3 d. h. die durch die allgemeine Formel vorgeschriebene Subtraction kann nicht ganz vollzogen werden, sondern es bleiben, nachdem man so viele Einheiten des Subtrahendus, als der Minuendus enthält, von dem lezteren abgezogen, noch 3 Einheiten abzuziehen übrig, und der Rest der wirklichen Subtraction der kleineren Zahl m von der größeren n, welcher dem auf die eben beschriebene Art gefundenen der Quantität nach immer gleich ist, erhält also eine Beschaffenheit und Benennung welche der bey Abfassung der Formel angenommenen entgegengesezt ist; er ist nämlich ein Theil der Größe n und von einerley

Namen und Beschaffenheit mit ihr, statt daß er, nach der bey Abfassung der Formel angenommenen Voraussezung mit der Größe m einerley Namen und Beschaffenheit haben sollte.

§. 145.

Um nun auf alle Fälle der Anwendung einer richtigen Behandlung dieser subtractiven Größen sich zu versichern muß zuerst der Begriff der entgegengesezten Größen genauer bestimmt und festgesezt, und die nächsten Folgen, welche sich daraus ergeben abgeleitet und zusammengestellt werden.

Man nennt aber überhaupt zwey Dinge entgegengesezt, wenn sie so beschaffen sind, daß das eine von ihnen dasjenige aufhebt, was durch das andere gesezt ist. Dies kann auf zweyerley Art geschehen, entweder logisch, durch den Widerspruch, oder real, durch Sezung eines positiven Grundes von der Aufhebung des andern.

Die logische Opposition besteht darin, daß von demselben Subjecte einerley Prädicat zugleich bejahet und verneinet wird. Die Folge dieser logischen Verknüpfung ist, wie der Saz des Widerspruchs es aussagt, jedesmal Nichts (nihilum negativum, s. absolutum, non — ens).

Die reale Opposition findet alsdann Statt, wenn zwey Prädicate desselben Subjects einander entgegengesezt sind, aber nicht durch den Saz des Widerspruchs. Das eine von ihnen hebt alsdann auch dasjenige auf, was durch das andere gesezt ist, aber die Folge ihrer Vereinigung ist Etwas (ens, cogitabile) z. B. Bewegkraft mit der Richtung nach Osten und eine gleich große Bestrebung nach Westen widersprechen einander nicht, und sind als Prädicate in demselben Körper zugleich möglich. Die Folge ihrer Vereinigung ist auch wieder Nichts, aber in einem andern Verstande als bey dem Widerspruche; nicht nihilum negativum, sondern nihilum privativum s. relativum = o. Daß dieses Nichts in anderer Hinsicht Etwas (cogitabile) heissen könne, sehen wir deutlich, aus dem Worte welches uns den Zustand bezeich-

net, der die Folge der erwähnten realen Opposition ist, nämlich Ruhe.

Die reale Opposition bestehet also in einer solchen Beziehung zweyer bejahenden Prädicate eines Dinges gegen einander, vermöge welcher die Folgen, welche jedes derselben für sich allein gehabt haben würde, durch ihre Vereinigung so aufgehoben werden, daß, wenn beyde der Quantität nach gleich sind, sie einen Zustand hervorbringen, welcher in Ansehung derselben = o zu sezen ist.

So sind bey der Division von Decimalbrüchen zwey gleichnamige Veränderungen (Vergrösserung und Verkleinerung) des Divisors und Dividendus in Ansehung ihrer Wirkungen auf die Veränderung des Quotienten, wie im §. 90. gezeigt worden ist, entgegengesezt, und die leztere ist = o, wenn jene beyden gleich viel betragen.

Eben so sind Activschulden und Passivschulden entgegengesezt, und das Eigenthum des Besizers ist = o, wenn die Summe der ersten der Summe der lezten gleich ist. Denn eine Activschuld von 100 Rthlr. enthält den Grund zu einer gleichen Einnahme, hingegen eine Passivschuld von 100 Rthlr. enthält den Grund zu einer ebensogroßen Ausgabe. Beyde in ihrer Vereinigung enthalten also den Grund zu einer Veränderung in dem Vermögenszustande des Besizers, welche = o ist, weil er nun weder etwas einzunehmen, noch etwas auszugeben hat.

Daß hier o bloß ein Zeichen des relativen nicht des absoluten Nichts sey, ist daraus deutlich, weil hier die Wirkung der Opposition kein Widerspruch, sondern bloß der Umstand ist, daß eine gewisse Folge nicht eintritt, wie im lezten Falle daß ein gewisses Kapital, im zweyten, daß eine gewisse Veränderung des Quotienten, und im ersten daß eine gewisse Bewegung nicht Statt findet, welches alles sich recht wohl gedenken lässet.

§. 146.

Aus diesem Begriffe der realen Entgegensezung fließen folgende Säze:

I. Die einander widerstreitenden Bestimmungen müssen in demselben Subjecte angetroffen werden. Denn wären sie in verschiedenen Subjecten so entstünde keine wirkliche Entgegensezung.

II. Bey einer realen Entgegensezung kann eine der entgegengesezten Bestimmungen nicht das contradictorische Gegentheil der andern seyn, denn sonst wäre der Widerstreit logisch, also die Folge davon, nach dem vorigen §. ein Unding.

III. Es kann eine Bestimmung nicht etwas anderes verneinen, als durch die andere gesezt ist; denn darin liegt gar keine Entgegensezung.

IV. Bey jeder realen Entgegensezung müssen beyde Prädicate für sich betrachtet positiv, aber so bestimmt seyn, daß bey der Verneinigung in demselben Subjecte ihre Folgen sich gegenseitig aufheben. Denn wären beyde an sich negativ, so würde durch keines etwas gesezt, was durch das andere aufgehoben würde. Wäre nur das eine an sich positiv und das andere an sich negativ, so würde ihre Vereinigung eine Verneinung dessen seyn, was in demselben Subjecte zugleich gesezt ist, was nach II. unmöglich ist.

§. 147.

In der Mathematik hat man es bloß mit der realen Opposition zu thun. Den Größen, bey welchen diese Statt findet, pflegt man die Beziehungszeichen + und — vorzusezen, welche mit den Operationszeichen der Addition und Subtraction nicht verwechselt werden dürfen. Denn die Größen, welchen das Zeichen — vorgesezt ist, führen dieses als Zeichen der Entgegensezung nur in so fern, als sie mit denen welche das Zeichen + führen, zusammen genommen werden sollen; werden sie aber mit solchen, welchen auch das Zeichen — vorgesezt ist, in Verbindung gebracht, so fällt alle Entgegensezung weg, weil diese ein Gegenverhältniß ist, welches nur zwischen + und — angetroffen wird. Da nun die Subtraction ein Aufheben ist, welches erfolgt, wenn entgegengesezte

sezten Winden getrieben wird. Gesezt, z. B. ein Schiff reise von Portugall nach Brasilien; man bezeichne die Meilen welche es mit dem Morgenwinde zurücklegt, mit +, die, durch welche es von dem Abendwinde getrieben wird, mit —, und es habe in sieben Tagen zurückgelegt + 12 — 3 + 7 — 5 + 8 Meilen, so ist es in dieser Zeit in der That um 19 Meilen nach Westen gekommen. Bezeichnete man hingegen den Gang mit dem Ostwinde durch — und die Fahrt mit dem Westwinde durch +, so erhielte man zwar der Quantität nach das nämliche Resultat, aber der Beziehung nach wäre es dem vorigen entgegengesezt, und dieses gäbe das Zeichen —, mit welchem es jezt erschiene, zu erkennen.

§. 148.

Dieses alles vorausgesezt kann man die Frage: „was denn eigentlich eine negative Größe sey?" nicht anders als auf folgende Art beantworten: keine Größe ist, an sich selbst betrachtet, negativ; in Ansehung einer andern aber heißt eine Größe negativ, wiefern sie mit dieser nicht anders, als durch Entgegensezung kann zusammengenommen werden, so nämlich, daß jede in der andern, so viel, als sie selbst beträgt, aufhebt. Da vermöge dieses Gegenverhältnisses die Größen, bey welchen dasselbe Statt findet, gegenseitig von einander gleich viel aufheben (§. 144.), so kann man etgentlich und genau genommen keine von beyden schlechthin negativ nennen, sondern man muß vielmehr sagen, daß von zwey solchen Größen z. B. + a und — a jede die negative der andern sey. Da indessen, wenn man nur von der einen derselben, die man als negativ betrachtet, zu sprechen hat, die Bestimmung: in Ansehung der ihr entgegengesezten, immer leicht hinzugedacht werden kann, so hat man sich in der Mathematik verstattet, die Größen, welchen das Zeichen — vorgesezt ist, schlechthin negative zu nennen, jedoch unter der Einschränkung, daß man die eben erwähnte Bestimmung jedesmal wirklich hinzu denke. Weit entfernt also Grössen eigener Art von einer besonderen inneren Beschaffenheit zu bezeichnen, soll diese Benennung lediglich jenes Gegenverhältniß andeuten, vermöge dessen die so

bezeichneten Größen mit andern gleichartigen, die das Zeichen + führen, in einer realen Entgegensezung zusammengenommen werden müssen.

Demnach kann man Schulden negatives Vermögen, Ausgabe negatie Einnahme, Fallen negatives Steigen, Zurückgehen negatives Vorwärtsgehen nennen, indem man durch diese Ausdrücke selbst zu erkennen giebt, daß die hier als negativ betrachteten und so benannten Größen nicht bloße Negationen der entgegengesezten, sondern positive Gründe der Verminderung dieser seyen. Da hier alles bloß auf das Gegenverhältniß ankommt, so könnte man Kapitalien eben so gut negative Schulden, als diese negative Kapitalien u. s. w. nennen. Es ist aber doch schicklicher, demjenigen, worauf in jedem Falle die Absicht oder die Aufmerksamkeit vorzüglich gerichtet ist, den Namen des negativen vorzusezen, wenn man sein reales Gegentheil bezeichnen will, obgleich in dem Gegenverhältnisse selbst kein Unterschied liegt, welcher den Grund dazu enthielte, sondern bloß in der Beziehung welche das Resultat dieses Gegenverhältnisses auf die Absicht der Vergleichung beyder entgegengesezten Größen hat.

§. 149.

Aus den in den beyden vorigen §. §. festgesezten Begriffen der entgegengesezten Größen überhaupt und der negativen ins Besondere ergeben sich verschiedene Folgerungen, welche wir, wegen ihrer Wichtigkeit für die Methode, diese Größen in Rechnungen zu behandeln, hier zusammenstellen wollen.

I. Das Gegenverhältniß zweyer entgegengesezten Größen erkennt man jedesmal aus den Beziehungszeichen + und —.

II. Daß diese Beziehungszeichen zugleich die Operationszeichen der Addition und Subtraction sind, das kann bey der Rechnung mit entgegengesezten Größen keine Irrung veranlassen, weil die reale Opposition dieser Größen eben darin bestehet, daß, bey der Vereinigung beyder, jede von der

Begriffe von Summen und Differenzen zurückgeführt werden.

XII. Die Frage: was für Resultate man erhalte, wenn man eine positive oder negative Größe durch eine negative, oder eine negative durch eine positive multiplicirt oder dividirt? muß man daher auch nie anders, als so zu beantworten suchen, daß man die Antwort aus der Multiplication und Division von Summen und Differenzen folgert.

XIII. Der Saz: eine negative Größe ist weniger als Nichts, hat seine Richtigkeit sobald man die Bestimmung hinzudenkt: von der ihr entgegengesezten positiven.

XIV. Man kann daher einen negativen Rest wie — za, theils um sich von diesem oder jenem Rechnungsfalle bestimmte Rechenschaft zu geben, theils um sich die Vorstellung von dem uneigentlich sogenannten Uebergange der Größen aus dem positiven Zustande durch o in den negativen zu erläutern, auch so ausdrücken: o — za; indem man dadurch zu erkennen giebt, daß, nachdem man von der vorhanden gewesenen Quantität der Größe a soviel weggenommen, bis Nichts von ihr übrig blieb, doch noch das Dreyfache derselben hätte weggenommen werden sollen, welches man also, da nichts mehr übrig sey, wovon es weggenommen werden könnte, bloß durch das Zeichen — anzudeuten sich begnügen müsse. Dies und nichts anders hat man sich unter dem erwähnten Uebergange, vorzustellen. Deutliche Beyspiele davon geben, außer dem in §. 144. erläuterten Falle, die arithmetische Reihe in §. 125 und 127, und die Logarithmen aller ächten Brüche §. 132.

XV. Von allen Schwierigkeiten, welche manche in der Lehre von den entgegengesezten Größen theils zu finden geglaubt, theils wirklich hineingebracht haben, ist der Grund, außer dem Umstande, daß man es oft verkehrter Weise unternommen hat, die negativen Größen für sich allein zu betrach-

ten, einzig darin zu suchen, daß man die Sprache des gemeinen Lebens mit der Rechnungssprache ungeschickt verbunden oder vermischt und die eine in die andere unrichtig übersetzt hat. Dergleichen Fehler zu vermeiden lehrt die Syntaxe der Rechnungssprache.

§. 150.

Zu den Rechnungsarten mit Buchstaben hat man noch folgende Säze nöthig, die sich aus den bisher angestellten Betrachtungen über die Ausdrückung der zählbaren Größen durch Buchstaben und Beziehungszeichen leicht ableiten lassen.

I. Alle Größen, die durch einerley Buchstaben ausgedrückt sind, müssen als gleichartige oder gleichnamige, solche hingegen, die durch verschiedene Buchstaben bezeichnet sind, als ungleichartige oder ungleichnamige angesehen werden.

II. Alle Ausdrücke, deren Theile ohne die Zeichen $+$, $-$ mit einander verbunden sind, wie $2a$, $6pq^{2}$, $\frac{3^{xy}}{4ab^{2}}$ heißen einfache; diejenigen hingegen, bey welchen die Verbindung, ihrer Theile vermittelst dieser Zeichen angedeutet ist, wie $6a - 9b$; $5p + 2q - 3^{x}$; $4ab^{2} - 6xy + 3z^{2}$, heißen zusammengesezte (polynomische), und zwar zweytheilige (binomische) wenn sie aus zwey, dreytheilige (trinomische) wenn sie aus drey Theilen bestehen.

III. Sollen mit zusammengesezten Ausdrücken die Veränderungen der Subtraction und Multiplication vorgenommen werden, so pflegt man sie in Parenthesen einzuschließen, und den Subtrahendus und Multiplicator hinter die Parenthese, oder den lezteren auch wohl vor dieselbe zu sezen. Z. B. $(6a + 7b - 9c) - (2a + b)$ bezeichnet die Differenz der Größen $6a + 7b - 9c$ und $2a + b$; $(p^{2} + 2pq + q^{2})(p - q)$ das Product der Größen $p^{2} + 2pq + q^{2}$ und $p - q$.

Eben so verfährt man bey Bezeichnung der Division zusammengesezter Ausdrücke, wenn man sich dazu des, sonst eigentlich zu Bezeichnung des Verhältnisses bestimmten, Zeichens bedient. Z. B. (25ac — 30 ad + 10cd) : (5a — d).

IV. Da (nach §. 149. VIII.) beyde entgegengesezte Größen an sich betrachtet eigentlich positiv sind, so hat man nicht eher Veranlassung auf ihr Gegenverhältniß die Aufmerksamkeit zu richten, als bis der Fall vorkommt, da sie in einer realen Opposition zusammen genommen werden sollen. Daher ist jede Größe, welcher kein Beziehungszeichen vorgesezt ist, als positiv anzusehen.

V. Die Ziffer 1 wird, weil sie bey der Multiplication nichts ändert, so wohl als Coefficiente wie als Exponente weggelassen, wenn man nicht einen besondern Grund hat, sie in der einen oder andern Eigenschaft auszudrücken.

VI. Eine vieltheilige Größe welche mehrere Potenzen von einerley Buchstaben enthält, wird nach diesem Buchstaben geordnet, wenn man ihre Glieder so aufeinander folgen lässet, daß die Exponenten der Potenzen vom ersten gegen das lezte zu wachsen oder abnehmen. Z. B. der Ausdruck: $x^3 + px^2 + qx + r$ ist nach den abnehmenden Potenzen von x geordnet. Kommt dabey einerley Potenz in mehreren Glieder vor, so werden diese zusammen nur als ein Glied betrachtet.

§. 151.

Einfache gleichnamige Größen werden addirt indem man ihre Coefficienten addirt, wo alsdann die Summe immer wieder eine einfache Größe wird. z. B.

3a	$6d^2$	11xy	$13pq^2$	$22nz^3$
5a	$6d^2$	17xy	$31pq^2$	$15nz^3$
4a	$3d^2$	21xy	$8pq^2$	$7nz^3$
12a	$18d^2$	49xy	$52pq^2$	$44nz^3$

Sind hingegen die zu addirenden Größen ungleichnamig, so kann man die vorzunehmende Addition derselben bloß durch Dazwischensezung des Zeichens + anzeigen, und der Ausdruck der Summe wird alsdann immer eine polynomische Größe z B.

7a	19p	36x
15b	23q	54z
7a+25b	16p+23q	36x+54z

§. 152.

Einfache gleichnamige Größen werden von einander abgezogen indem man den Coefficienten der kleineren von dem Coefficienten der größeren abzieht, wo alsdann die Differenz immer wieder eine einfache Größe wird; z. B.

7a	$13bd^2$	$27pq^{23}$	$36xyz^4$
a	$9bd^2$	$19pq^{23}$	$16xyz^4$
6a	$4bd^2$	$8pq^{23}$	$20xyz^4$

Sind hingegen die zu subtrahirenden Größen ungleichnamig, so kann man die vorzunehmende Subtraction bloß vermittelst des Zeicheus — anzeigen, und der Ausdruck der Differenz wird alsdann immer eine polynomische Größe z. B.

5a	$13cd^2$	$11mn^2$
7b	$8gh^2$	$6pq^2$
5a—7b	$13cd^2-8gh^2$	$11mn^2-6pq^2$

§. 153.

Um eine einfache Größe mit einer andern ähnlichen zu multipliciren, mache man das Product der Coefficienten beyder und schreibe diesem zur rechten

Seite die Buchstaben welche beyde zusammen enthalten z. B.

5ab	6bc	8kmn	7ry
3a	4c	2pq	5xz
15aab	24bcc	16kmnpq	35rxyz

16fgh	25acd
2	4
32fgh	100acd

§. 154.

Um eine Größe mit einer andern einfachen zu dividiren beantworte man sich jedesmal die Frage: welche Größe ist so beschaffen, daß sie, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus zum Producte giebt? Denn eben diese ist der Quotiente, wie aus den Begriffen der Division folgt z. B.

2ac) 26abcd ⎰ 13bd; 4xz) 32xyz ⎰ 8y;

5mn) 45mnp ⎰ 9p; 7gr) 56grs ⎰ 8s;

4bd) 16ad ⎰ $\frac{4a}{b}$; 2nq) 12np ⎰ $\frac{6p}{q}$;

3) 21xyz ⎰ 7xyz: 8) 56ghk ⎰ 7ghk.

§. 155.

Sollen vieltheilige Größen addirt werden, so schreibe man sie so an, daß durchaus gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen, alsdann ziehe man einen Strich unter ihnen weg. Endlich addire man diejenigen, welche einerley Zeichen haben, unter denen aber, welche verschiedene Zeichen haben, ziehe man die kleinern von den größeren ab, und seze dem Reste das Zeichen der größeren vor (§. 149. V.). Ist aber ein Glied nur einmal vorhanden, so wird es bloß mit seinem Zeichen herunter gesezt z. B.

Sind hingegen die zu addirenden Größen ungleichnamig, so kann man die vorzunehmende Addition derselben bloß durch Dazwischensezung des Zeichens + anzeigen, und der Ausdruck der Summe wird alsdann immer eine polynomische Größe z B.

7a	19p	36x
15b	23q	54z
7a+25b	16p+23q	36x+54z

§. 152.

Einfache gleichnamige Größen werden von einander abgezogen indem man den Coefficienten der kleineren von dem Coefficienten der größeren abzieht, wo alsdann die Differenz immer wieder eine einfache Größe wird; z. B.

$7a$	$13bd^2$	$27pq^{23}$	$36xyz^4$
a	$9bd^2$	$19pq^{23}$	$16xyz^4$
$6a$	$4bd^2$	$8pq^{23}$	$20xyz^4$

Sind hingegen die zu subtrahirenden Größen ungleichnamig, so kann man die vorzunehmende Subtraction bloß vermittelst des Zeicheus — anzeigen, und der Ausdruck der Differenz wird alsdann immer eine polynomische Größe z. B.

$5a$	$13cd^2$	$11mn^2$
$7b$	$8gh^2$	$6pq^2$
$5a-7b$	$13cd^2-8gh^2$	$11mn^2-6pq^2$

§. 153.

Um eine einfache Größe mit einer andern ähnlichen zu multipliciren, mache man das Product der Coefficienten beyder und schreibe diesem zur rechten

Seite die Buchstaben welche beyde zusammen enthalten z. B.

5ab	6bc	8kmn	7ry
3a	4c	2pq	5xz
15aab	24bcc	16kmnpq	35rxyz

16fgh	25acd
2	4
32fgh	100acd

§. 154.

Um eine Größe mit einer andern einfachen zu dividiren beantworte man sich jedesmal die Frage: welche Größe ist so beschaffen, daß sie, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus zum Producte giebt? Denn eben diese ist der Quotiente, wie aus den Begriffen der Division folgt z. B.

2ac) 26abcd ⎰ 13bd; 4xz) 32xyz ⎰ 8y;

5mn) 45mnp ⎰ 9p; 7gr) 56grs ⎰ 8s;

4bd) 16ad ⎰ $\frac{4a}{b}$; 2nq) 12np ⎰ $\frac{6p}{q}$;

3) 21xyz ⎰ 7xyz: 8) 56ghk ⎰ 7ghk.

§. 155.

Sollen vieltheilige Größen addirt werden, so schreibe man sie so an, daß durchaus gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen, alsdann ziehe man einen Strich unter ihnen weg. Endlich addire man diejenigen, welche einerley Zeichen haben, unter denen aber, welche verschiedene Zeichen haben, ziehe man die kleinern von den größeren ab, und seze dem Reste das Zeichen der größeren vor (§. 149. V.). Ist aber ein Glied nur einmal vorhanden, so wird es bloß mit seinem Zeichen herunter gesezt z. B.

$$\begin{array}{rrrr} 25ab & -13cd & +8fg & +11hk \\ 7ab & -5cd & -15fg & +3hk \\ 4ab & -2cd & +10fg & -26hk \\ \hline 36ab & -20cd & +3fg & -12hk \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 13mn^2 & +9pq^2 & -7rs^{23} & -10xyz^{32} \\ -21mn^2 & -4pq^2 & +15rs^{23} & -6xyz^{32} \\ -5mn^2 & -9pq^2 & +18rs^{23} & -15xyz^{32} \\ \hline -13mn^2 & -4pq^2 & +26rs^{23} & -xyz^{32} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 9ab^2 & +11acd^2 & -15bdf^2 & +7np^2 \\ 3ab^2 & -21acd^2 & +20bdf^2 & -12np^2 \\ \hline 12ab^2 & -10acd^2 & +5bdf^2 & -5np^2 \\ 15ab^2 & -3cd^2 & +9hk^{23} & -7emn^2 \\ 5ab^2 & +2cd^2 & -16hk^{23} & +7emn^2+10fgh \\ \hline 20ab^2 & -cd^2 & -7hk^{23} & +10fgh \end{array}$$

§. 156.

Eine Größe wird von einer andern abgezogen, wenn man sie mit dem entgegengesezten Zeichen zu dieser hinzusezt.

Soll z. B. von der Größe m die n abgezogen werden, so ist die Differenz m — n.

Denn man kann die m ausdrücken durch m + n — n (§. 149.); nimmt man also davon die n, d. h. + n weg, so bleibt übrig m — n; nimmt man hingegen die — n weg, so bleibt übrig m + n.

§. 157.

Sollen vieltheilige Größen von einander abgezogen werden, so schreibe man die abzuziehende unter die andere so, daß durchaus gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen und ziehe einen Strich unter ihnen weg. Hierauf verwandle man die Zeichen aller Glieder der abzuziehenden Größe in die entgegengesezten; endlich addire man sie mit diesen veränderten Zeichen zu den darüber stehenden nach §. 155, und wenn ein Glied nur in einer Reihe vorhanden ist, so seze man solches mit seinem zugehörigen Zeichen unverändert herunter; alsdann ist die so erhaltene Summe, nach dem vorigen §. der gesuchten Differenz gleich z. B.

$$\begin{array}{r} 27ax - 31ay + 56xy + 17az - 9xz \\ 16ax - 5ay + 19xy + 12az - 3xz \\ - \quad + \quad - \quad - \quad + \\ \hline 11ax - 26ay + 37xy + 5az - 6xz \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -7ab^2 - 18cd^2 + 3ad^3 - ad^4 + 17be - 9df^2 \\ -13ab^2 + 2cd^2 - 17ad^3 * + 37be - 12df^2 \\ + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \hline 6ab^2 - 20cd^2 + 20ad^3 - ad^4 - 20be + 3df^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51mp^2 + 34pq^2 - 23m^3q^2 \\ 16mp^2 + 34pq^2 - 15m^2q^3 \\ - \quad - \quad + \\ \hline 51mp^2 - 16mp^2 - 23m^3q^2 + 15m^2q^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81xy - 76xz - 64xz^3 + 48xy^2 - 11z^2 \\ 66xy - 76xz + 8xz^3 - 2xz^2 - 11z^2 \\ - \quad + \quad - \quad + \quad + \\ \hline 15xy - 72xz + 50xy^2 + 10z^2 \end{array}$$

§. 158.

Um die Regeln der Multiplication und Division zusammengesezter Größen aus sichern Gründen ableiten zu können, müssen noch folgende Säze vorausgeschickt werden.

I. Die Summe zweyer Größen wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt und die Producte addirt. D. i. $(a + b) \times n = a \times n + b \times n = na + nb$.

Denn, wenn man die Summe $a + b = \int$ sezt, so ist $a + b + a + b = \int + \int$ d. i. $2a + 2b = 2\int = 2(a + b)$. Eben daher ist $2a + 2b + a + b = 2\int + \int$, d. i. $3a + 3b = 3\int = 3(a + b)$. Eben so ist $4a + 4b = 4(a + b)$; $5a + 5b = 5(a + b)$ u. s. w. also ist im Allgemeinen $na + nb = n(a + b)$ d. i. $a \times n + b \times n = (a + b)n$.

II. Die Differenz zweyer Größen wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt, und das kleinere Product vom größeren abzieht; d. i. $(a - b)n = a \times n - b \times n = na - nb$.

Denn, wenn man die Differenz $a - b = d$ sezt, so ist $(a - b) \times n = d \times n$. Da nun aus der Voraussezung, daß $a - b = d$, folgt $a = d + b$, so ist auch $a \times n = (d + b) \times n$ und da $(d + b)n = dn + bn$ (I.); so ist auch $an = dn + bn$, folglich $an - bn = dn$. Nun war vorher $(a - b)n = dn$; folglich ist auch $(a - b)n = an - bn$.

III. Eine Größe wird durch die Summe zweyer ganzen Zahlen multiplicirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplicirt und die Producte addirt, d. i. $a \times (m + n) = a \times m + a \times n = ma + na$.

Dies folgt aus I. weil bey Bildung eines jeden Products die Ordnung der Factoren willkührlich ist, d. i. weil immer $a \times m = m \times a$.

IV. Eine Größe wird durch die Differenz zweyer ganzen Zahlen multiplicirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplicirt, und das kleinere Product vom größeren abzieht, d. i. $a \times (m - n) = a \times m - a \times n = ma - na$.

Dies folgt ebenso aus II. Man kann es aber auch besonders so beweisen:

Um a durch $m - n$ zu multipliciren muß man zuerst das Product aus a durch m machen, dieses ist ma. Allein dieses Product ist offenbar zu groß; denn man hätte a nicht mit der ganzen Zahl m, sondern mit der um n verminderten Zahl m multipliciren sollen. Demnach ist in dem Producte ma die Zahl n so vielmal zu viel enthalten, wie vielmal die Zahl m darin enthalten ist. Nun giebt aber die Zahl a an, wie vielmal in dem Producte ma die Zahl m enthalten sey; folglich muß man n von demselben amal abziehen, um es richtig zu erhalten, und das Product wird also $ma - na$.

V. Die Differenz zweyer ganzen Zahlen wird durch eine andere Differenz solcher Zahlen multiplicirt, wenn man die eine Differenz mit dem Minuendus der andern multiplicirt, und von diesem Producte dasjenige abzieht, was die Multiplication der ersten mit dem Subtrahendus der andern giebt; d. i. $(a - b) \times (m - n) = m \times (a - b) - n \times (a - b) = ma - mb - na + nb$.

Denn, um das Product aus $a - b$ durch $m - n$ zu machen, muß man zuerst $a - b$ mit m multipliciren. Dadurch erhält man zum Producte $ma - mb$ (II.) welches aber offenbar zu groß ist, weil man die Diff[illegible]t mit der ganzen Zahl m, sondern m[illegible]derten Zahl m hätte multipliciren [illegible]cte ma[illegible] mb ist also die Zahl [illegible]. wie vielmal die [illegible]es aber die Diffe- [illegible]ie vielmal in dem [illegible]halten sey; folglich [illegible]roduct richtig zu er- [illegible]en ma — mb die Zahl n

a — b mal genommen, abziehen; d. h. man muß abziehen na — nb. Dies geschieht aber nach dem vorigen §. indem man — na + nb addirt.

Folglich ist (a — b) × (m — n) = m × (a — b) — n × (a — b) = ma — mb — na + nb.

VI. Aus IV. folgt

1) + a × + m = + ma;
2) + a × — n = — na;

Aus V hingegeu folgt

1) — b × + m = — mb;
2) — b × — n = + nb.

Sezt man überall den Multiplicator = a den Multiplicandus = m, so erhält man die Regeln

1) + a × + m = + ma
2) + a × — m = — ma
3) — a × + m = — ma
4) — a × — m = + ma

Diese Regeln lassen sich leicht in eine zusammenfassen, und in Worten kurz so ausdrücken:

Einerley Zeichen der Factoren geben dem Producte das positive, verschiedene — das negative Zeichen.

In Beziehung auf die Beweise der Säze IV und V ist es zwar verstattet, zum Behufe der Praxis sich so auszudrücken; übrigens behalten die Bemerkungen der §. §. 149. 150, daß man nie eiue negative Größe für sich allein betrachten müsse, gleichwohl ihre Richtigkeit.

VII. Die Regel der Zeichen bey der Multiplication (V. 1) — 4)) kann man noch kürzer so beweisen

1) Es sey zu multipliciren a — a durch m, so sieht man, daß das Product = o werden muß, weil der Multiplicandus = o ist. Da nun das erste Glied dieses Products = + ma ist, so muß das zweyte, um

jenes anfzuheben, nothwendig = — ma werden, und mithin ist — a × + m = — ma.

2) Es sey zu multipliciren a — a durch m — m. Das Product muß auch hier = o werden, weil jeder der Factoren = o ist. Nun ist der erste Theil dieses Products + ma — ma = o nach I); von dem zweyten Theile desselben aber ist das erste Glied + a × — m, oder — m × + a = — ma nach I); soll also dieses durch das zweyte Glied aufgehoben werden, wie es seyn muß, damit das gesammte Product = o wird, so muß dieses zweyte Glied + ma seyn. Demnach ist + a × — m = — ma und — a × — m = + ma.

VIII. Die Regel der Zeichen bey der Division lässet sich aus der für die Multiplication gefundenen (VI.) ableiten, wenn man sich nur des Sazes erinnert, der aus dem Begriffe der Division folgt, daß das Product aus dem Divisor in den Quotienten den Dividendus, sowohl in Absicht auf die Qantität, als in Absicht auf die Verbindungszeichen, wiederherstellen muß.

Demnach ist klar, daß

1) $\frac{+ ma}{+ m} = + a$

2) $\frac{+ ma}{- m} = - a$

3) $\frac{- ma}{+ m} = - a$

4) $\frac{- ma}{- m} = + a$

Einerley Zeichen des Divisors und Dividendus geben also dem Quotienten das positive, verschiedene — das negative Zeichen.

Auch hier gilt die in VI. beygebrachte Bemerkung auf gleiche Weise.

§. 159.

Die Multiplication zusammengesezter Grösen läſſet sich in Ansehung der Coefficienten und der Buchstaben ganz auf die Multiplication einfacher Grösen zurückführen, nur daß hier noch die Rücksicht auf die Zeichen der Glieder hinzukommen muß.

Sollen also zwey vieltheilige Grösen mit einander multiplicirt werden, so schreibe man sie unter einander und ziehe unter ihnen einen Strich. Hierauf mache man die Producte aus allen Theilen des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus in Ansehung der Coefficienten und Buchstaben nach §. 153. in Ansehung der Zeichen nach §. 158. VI. Endlich addire man diese Partialproducte so, daß man überall die Reductionen vornimmt, welche, wo sie sich anbringen lassen, erforderlich sind, um der Summe den kürzesten Ausdruck zu geben, so ist diese Summe das gesuchte Product. Z. B.

$$5a + 6b - 9c + 2d$$
$$2a + 5b - c$$

$$10a^2 + 12ab - 18ac + 4ad$$
$$+ 25ab + 30b^2 - 45bc + 10bd$$
$$- 5ac - 6bc + 9c^2 - 2cd$$

$$10a^2 + 37ab - 23ac + 30b^2 + 4ad - 51bc + 10bd + 9c^2 - 2cd$$

$$3m - 6n - 8p + 5q$$
$$2u - 4p + 3q$$

$$6m^2 - 12mn - 16pm + 10qm$$
$$- 12pm + 24pn + 32p^2 - 20pq$$
$$+ 9qm - 18qn - 24pq + 15q^2$$

$$6m^2 - 12mn - 28pm + 24pn + 19qm + 32p^2 - 18qn - 44pq$$
$$+ 15q^2$$

$$3a + 5b + 3c + d$$
$$-2a - 3b + 6$$

$$-6a^2 - 10ab - 6ac - 2ad$$
$$- 9ab - 15b^2 - 9bc - 3bd$$
$$+ 18a + 30b + 18c + 6d$$

$$18a + 30b + 18c + 6d - 6a^2 - 19ab - 6ac - 15b^2 - 2ad$$
$$- 9bc - 3bd$$

$$2ax - 4by + 6cz$$
$$3x - 5z$$

$$6ax^2 - 12bxy + 18cxz$$
$$- 10axz + 20byz - 30cz^2$$

$$6ax^2 - 12bxy + 18cxz - 10axz + 20byz - 30cz^2$$

$$9m - 7n - 5q$$
$$4m + 2n - q$$

$$36m^2 - 28mn - 20mq$$
$$+ 18mn - 14n^2 - 10nq$$
$$- 9mq + 7nq + 5q^2$$

$$36m^2 - 10mn - 29mq - 14n^2 - 3nq + 5q^2$$

$$a + b$$
$$a + b$$

$$a^2 + ab$$
$$+ ab + b^2$$

$a^2 + 2ab + b^2$ eine allgemeine Formel für das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel,

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$a + b$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ eine allgemeine Formel für den Cubus einer zweytheiligen Wurzel.

$$a + b$$
$$a - b$$

$$a^2 + ab$$
$$- ab - b^2$$

$a^2 - b^2$ eine allgemeine Formel für das Product aus der Summe zweyer Größen in ihre Differenz.

$$2m + 1$$
$$2m$$

$4mn + 2n$ eine allgemeine Formel für das Product aus zwey geraden Zahlen und für jenes aus einer ungeraden Zahl in eine gerade.

$$2m + 1$$
$$2n + 1$$

$$4mn + 2n$$
$$+ 2m + 1$$

$4mn + 2m + 2n + 1$ eine allgemeine Formel für das Product aus zwey ungeraden Zahlen.

§. 160.

Die Division zusammengesezter Größen wird auf eine ähnliche Art wie bey bestimmten Zahlen bewerkstelliget.

Sollen also vieitheilige Größen durch einander dividirt werden, so ordne man den Divisor und Dividendus nach einerley Buchstaben. Hierauf dividire man den höchsten Theil des Divisors, in Ansehung der Coefficienten und Buchstaben nach §. 154, in Ansehung der Zeichen nach §. 158. VIII. so findet man den höchsten Theil des Quotienten. Mit diesem multiplicire man den ganzen Divisor, das erhaltene Product ziehe man von dem Dividendus ab, nach §. 157, so bleibt ein Rest. Mit diesem verfahre man wieder ebenso wie vorher mit dem ganzen Dividendus, so erhält man den zweyten Theil des Quotienten und, nachdem man dessen Product in den ganzen Divisor vom ersten Reste abgezogen, den zweyten Rest. Diesen hat man wieder ebenso, wie den ersten, zu behandeln, und dies Verfahren so lange fortzusezen, bis entweder die Division aufgeht, oder wenigstens kein Glied des Dividendus mehr übrig ist, in welches man noch dividiren könnte. Z. B.

$$3a - 2b) \; 15a^2 - 10ab + 9ad - 6bd \; (5a + 3d$$

$$15a^2 - 10ab$$
$$- \quad +$$
$$0 \quad + 9ad - 6bd$$
$$+ 9ad - 6bd$$
$$- \quad +$$
$$0 \quad - \quad 0$$

$$2ab - 4ac + ad) \; 6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20ac^2 - 13acd^2 + 2ad^2 \; (3ab^2 - 5ac + 2ad$$

$$6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd$$
$$- \quad + \quad -$$
$$0 \quad - 10a^2bc + 4a^2bd + 20ac^2 - 13acd^2$$
$$- 10a^2bc + 20ac^2 - 5acd^2$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$0 \quad + 4a^2bd - 8acd^2 + 2ad^2$$
$$+ 4a^2bd - 8acd^2 + 2ad^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$0 \quad - \quad 0$$

$$2a + 3b - 2d \;\overline{)}\; 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2 \;\big|\; 5a - 2b - d$$

$10a^2 + 15ab - 10ad$

$0 - 4ab - 2ad - 6b^2 + bd$

$-4ab - 6b^2 + 4bd$

$0 - 2ad - 3bd + 2d^2$

$-2ad - 3bd + 2d^2$

$0 - 0$

$$2m - 3x \;\overline{)}\; 6m^3 - 13m^2x + 8mx^2 - 3x^3 \;\big|\; 3m^2 - 2mx + x^2$$

$6m^3 - 9m^2x$

$0 - 4m^2x + 8mx^2$

$+2m^2x - 3x^3$

$+2m^2x - 3x^3$

$0 - 0$

$$3n - 2p \;\overline{)}\; 15n^2 - 10np + 9nq - 6pq \;\big|\; 5n + 3q$$

$15n^2 - 10np$

$0 + 9nq - 6pq$

$+9nq - 6pq$

$0 - 0$

$2a - 4b + c - 8) \; 6a^2 - 22ab + 15ac + 20b^2 - 26a - 29bc + 44b + 6c^2 - 49c + 8 \; \{ 3a - 5b + 6c - 1$

$6a^2 - 12ab + 3ac - 24a$

$- \quad + \quad - \quad +$

$0 - 10ab + 12ac + 20b^2 - 2a - 29bc + 44b$

$- 10ab + 20b^2 - 5bc + 40b$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$0 + 12ac - 2a - 24bc + 4b + 6c^2 - 49c$

$+ 12ac - 24bc + 6c^2 - 48c$

$- \quad + \quad - \quad +$

$0 \quad - 2a + 4b - c + 8$

$- 2a + 4b - c + 8$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$0 \quad - \quad 0$

$7b + 2c - 6d)\ 35ab + 21b^2 + 10ac - 57bc - 30ad + 10bd - 18c^2 + 6cd - 24d^2\ (\ 5a + 3b - 9c + 4d$

$35ab + 10ac - 30ad$
$- \quad - \quad +$

$0 \quad + 21b^2 - 57bc + 10bd$
$+ 21b^2 + 6bc - 18bd$
$- \quad - \quad +$

$0 \quad - 63bc + 28bd - 18c^2 + 62cd$
$- 63bc - 18c^2 + 54cd$
$+ \quad + \quad -$

$0 \quad + 28bd + 8cd - 24d^2$
$+ 28bd + 8cd - 24d^2$
$- \quad - \quad +$

$0 \quad - \quad 0$

§. 161.

Wenn eine solche Division nicht aufgeht, so muß der am Ende übrig bleibende Rest dem Quotienten eben so, wie bey der Division bestimmter Zahlen, in der Gestalt eines Bruchs angehängt werden. Weil man aber durch einen solchen gemischten Ausdruck des Quotienten in keiner Hinsicht etwas gewinnen kann, so pflegt man in diesem Falle die Division vielmehr bloß anzuzeigen. Um jedoch auch alsdann die Rechnung, durch Vereinfachung der Ausdrücke, so weit, als es sich thun lässet, abzukürzen, sucht man den Divisor und Dividendus in ihre Factoren zu zerlegen, was man durch öftere Uebungen in der Multiplication und Division leicht zu einer gewissen Fertigkeit bringen kann. Findet man dann, daß beyde einen oder etliche Factoren mit einander gemein haben, so können diese nach §. 31, gegen einander weggelassen werden. Z. B.

$$\frac{ax - a}{3bx - 3b} = \frac{a(x - 1}{3b(x - 1)} = \frac{a}{3b}$$

$$\frac{my + y^2}{2ny - py} = \frac{(m + y)y}{(2n - p)y} = \frac{m + y}{2n - p}$$

Weitere Beyspiele solcher Zerlegungen.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1).$$

$$6ab^2 - 12abc - 3ab = 3ab(2b - 4c - 1).$$

$$p^2 - q^2 = p^2 + pq - pq - q^2 = p(p + q) - q(p + q)$$
$$= (p + q)(p - q).$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n^2 - n - 2n + 2)$$
$$= n[n(n-1) - 2(n-1)] = n(n-1)(n-2).$$

$$2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n = n(2n^2 + 3mn + 3m - 2)$$
$$= n(2n^2 - 2 + 3mn + 3m)$$
$$= n[2(n^2 - 1) + 3m(n + 1)]$$
$$= n[2(n + 1)(n - 1) + 3m(n + 1)]$$
$$= n(n + 1)(3m + 2n - 2).$$

$n^2 - m^2 - n + m = n^2 - mn - m^2 - n + mn + m$

$= (n - m)(n - 1) + m(n - m) = (n - m)(m + n - 1).$

$2mn - 3n^2 + nr - 2m + 3n - r = (2m - 3n + r + 3)n$

$- (2m + r) = (2m - 3n + r)(n - 1).$

$m^3 - mn^2 - m^2 + m - 2mn^2 + 2mn + n - 1 =$

$(m^2 - mn - m + 1 - 2n^2 + 2n)m - (1 - n) =$

$(m^2 - 2mn + 1)(m + n - 1).$

§. 162.

Bey solchen Zerlegungen kommt man oft in den Fall, von folgenden zwey Säzen, die übrigens auch ausserdem noch zu manchen Absichten dienlich sind, nüzlichen Gebrauch zu machen.

I. In jedem zusammengesezten Ausdrucke, von der Art, wie die sämmtlichen Factoren eines Products, der Zähler und Nenner eines Bruchs und die beyden Seiten einer Gleichung darstellen, ist es erlaubt, alle vorhandenen Zeichen in die entgegengesezten zu verwandeln.

Dies folgt aus §. 149. II.

z. B. $(x + 1)(x - 1) = (1 - x) \times (-x - 1) = x^2 - 1$

$$\frac{3ax - x^2}{2n + r} = \frac{x^2 - 3ax}{r - 2n}$$

II. Wird einer vieltheiligen Größe, die in einer Parenthese eingeschlossen ist, das Zeichen — vorgesezt, so afficirt dieses alle in der Parenthese begriffenen Glieder eben so, als wenn der ganze Ausdruck durch — 1 multiplicirt wäre.

Dies folgt aus §. 157. 159.

z. B. $-(m^2 - n^2 + 3m - 3n) = n^2 - m^2 + 3n - 3m$

$$-\frac{(b - a - c)x}{(m - n + 1)r} = \frac{(a - b + c)x}{(m - n + 1)r}$$

§. 163.

Brüche, welche in Buchstaben ausgedrückt sind, werden wie die in Ziffern ausgedrückten behandelt, d. h. nach den, im zweyten Abschnitte gefundenen, Regeln auf einerley Benennung gebracht, addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt und aufgehoben, weil die Gründe, aus welchen diese Regeln abgeleitet worden sind, für die ersten eben so, wie für die lezten, gelten. Z. B.

I. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ sind einerley mit

$$\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}.$$

II. $$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + gh}{gk}.$$

III. $$\frac{m}{n} - \frac{r}{s} = \frac{ms - nr}{ns}.$$

IV. $$\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

V. $$\frac{u}{x} : \frac{y}{z} = \frac{u}{x} \times \frac{z}{y} = \frac{uz}{xy}.$$

VI. $$\frac{am^2 - bmn}{cdm - efm} = \frac{(am - bn)m}{(cd - ef)m} = \frac{am - bn}{cd - ef}.$$

§. 164.

Um Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren, addire man die Exponenten der Factoren, so ist deren Summe der Exponente des Products.

Z. B. $a^5 \times a^3 = a^{5+3} = a^8$.

Denn es ist $a^5 = aaaaa$, $a^3 = aaa$; folglich

$a^5 \times a^3 = aaaaa \times aaa = aaaaaaaa = a^8 = a^{5+3}$.

Demnach im Allgemeinen $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

§. 165.

Um Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu dividiren, subtrahire man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendus, so ist deren Differenz der Exponente des Quotienten.

z. B. $\frac{a^5}{a^3} = a^2$.

Denn es ist $a^5 = aaaaa$, $a^3 = aaa$; folglich

$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = a^2 = a^{5-3}$; oder:

es ist $\frac{a^5}{a^3} \times a^3 = a^5$; aber auch

$a^2 \times a^3 = a^5$ (§. 164); folglich

$\frac{a^5}{a^3} \times a^3 = a^2 \times a^3$, und mithin $\frac{a^5}{a^3} = a^2$; oder im

Allgemeinen, da $\frac{a^m}{a^n} \times a^n = a^m$, aber auch $a^{m-n} \times a^n = a^m$ (§. 164.), so ist $\frac{a^m}{a^n} \times a^n = a^{m-n} \times a^n$, folglich

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

§. 166.

Um eine gegebene Potenz zu einem höheren Grade zu erheben, multiplicire man den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten des höheren Grades, so ist das Product der Exponente der gesuchten Potenz.

Z. B. $\left(a^{4}\right)^{2} = a^{4.2} = a^{8}$.

Denn es ist $\left(a^{n}\right)^{2} = a^{n} \times a^{n} = a^{n+n} = a^{2n}$ (§. 164.).

Ebenso ist $\left(a^{n}\right)^{3} = a^{n} \times a^{n} \times a^{n} = a^{n+n+n} = a^{3n}$ u. s. w.

folglich im Allgemeinen $\left(a^{n}\right)^{m} = a^{mn}$.

§. 167.

Um aus einer gegebenen Potenz eine Wurzel von einem verlangten Grade auszuziehen, dividire man den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem gegebenen Wurzelexponenten, so ist der Quotiente det Exponente der gesuchten Wurzel.

Z. B. $\sqrt[3]{a^{2}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Denn es ist $\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3} = a$, und im Allgemeinen $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$. Ferner $\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{n} = a^{m}$, und $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = a^{\frac{m}{n}\cdot n}$ (§. 166.) $= a^{m}$; folglich ist $\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n}$, u. mithin $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$.

§. 168.

Wegen des Nuzens, den sie für die Rechnung haben, muß man auch den Werth solcher Potenzen kennen, welche 1 oder 0 zum Exponenten haben, und deren Exponenten negativ sind.

Dieser wird durch folgende Säze bestimmt.

I. Jede Potenz, deren Exponent 1 ist, ist der Wurzel gleich. Z. B. $a^{1} = a$.

Denn es ist $\frac{aaa}{aa} = a$; aber $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2}$

(§. 165.) $= a^1$; folglich $a^1 = a$.

II. Jede Potenz, deren Exponent o ist, ist der Einheit gleich. Z. B. $a^0 = 1$

Denn es ist $\frac{a^2}{a^2} = 1$; aber $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2}$ (§. 165.)

$= a^0$; folglich $a^0 = 1$.

III. Jede Potenz mit einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, der zum Zähler die Einheit und zum Nenner dieselbe Potenz mit demselben Exponenten, positiv genommen, hat. Z. B. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Denn es ist $a^{-n} = a^{0-n}$ (§. 149. XIV.) $= \frac{a^0}{a^n}$ (§. 165.)

$= \frac{1}{a^n}$ (II.)

§. 169.

Die Regeln der Multiplication und Division der Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

Dies lässet sich auf folgende Art zeigen:

A für die Multiplication.

1) Es ist $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$; denn

$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n}$ (§. 168.) $= \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(§. 165.).

2) Es ist $a^{-m} \times a^{n} = a^{n-m}$; denn

$a^{-m} \times a^{n} = a^{n} \times \frac{1}{a^{m}}$ (§. 168.) $= \frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}$ (§. 165.).

3) Es ist $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}$; denn

$a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$, und $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$; demnach

$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^{m}} \times \frac{1}{a^{n}} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$.

4) Es ist $(a^{-m})^{n} = a^{-mn}$; denn

$a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$, folglich $(a^{-m})^{n} = \left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

Ebenso $(a^{m})^{-n} = a^{-mn}$, und $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$.

B für die Division.

1) Es ist $\frac{a^{m}}{a^{-n}} = a^{m+n}$; denn

$\frac{a^{m}}{a^{-n}} = a^{m} : \left(\frac{1}{a^{n}}\right) = a \times a^{n}$ (§. 25. IV.) $= a^{m+n}$ (§. 164).

2) Es ist $\frac{a^{-m}}{a^{n}} = a^{-(m+n)}$; denn

$\frac{a^{-m}}{a^{n}} = \frac{1}{a^{m}} : a^{n} = \frac{1}{a^{m} \times a^{n}}$ (§. 19. II.) $= \frac{1}{a^{m+n}}$ (§. 164.)

$= a^{-(m+n)}$ (§. 168. III.).

3) Ebenso ist $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$; denn

$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{m}} : \frac{1}{a^{n}}$ (§. 168. III.) $= \frac{1}{a^{m}} \times \frac{a^{n}}{1}$ (§. 25.

IV.) $= \frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}$ (§. 165.).

4) Es ist $\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$; denn

$a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$; demnach $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{m}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^{m}}}$

$= \frac{\sqrt[n]{1}}{a^{\frac{m}{n}}}$ (§. 167.) $= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$ (§. 168. III.).

§. 170.

Die Regeln der Multiplication und Division der Potenzen mit ganzen Exponenten gelten auch für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Dies kann durch folgende Schlüsse dargethan werden.

I. Es ist $a^{r} \times a^{\frac{m}{n}} = a^{r+\frac{m}{n}}$; denn

$a^{r} \times a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{rn}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^{rn} \times a^{m})} = \sqrt[n]{(a^{rn+m})}$

$= a^{\frac{rn+m}{n}} = a^{r+\frac{m}{n}}$.

II. Es ist $a^{r} : a^{\frac{m}{n}} = a^{r-\frac{m}{n}}$; denn

$$a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{rn}{n}} : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^{rn} : a^{m})} = \sqrt[n]{(a^{rn-m})}$$

$$= a^{\frac{rn-m}{n}} = a^{r-\frac{m}{n}}.$$

Da in diesen Schlüssen nichts geändert wird, wenn man statt des Exponenten r sezt $\frac{1}{s}$, so sind zugleich auch die Fälle darunter begriffen, da beyde Factoren, oder Dividendus und Divisor zugleich gebrochene Exponenten haben.

III. Es ist $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$; denn

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}:m} = a^{\frac{1}{mn}} \text{ u. s. w.}$$

§. 171.

Ein Product oder ein Quotiente wird zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Theil des Products oder des Quotienten zu dieser Potenz erhebt, und diese Theile alsdann gehörig mit einander verbindet.

$$\text{Z. B. } (ab)^m = a^m b^m ; \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}.$$

Denn vermöge des Begriffs der Multiplication ist $1 : a = b : ab$, und daher $1 : a^m = b^m : (ab)^m$; demnach $(ab)^m = a^m \times b^m$ (§. 47.). Folglich ist auch $(pqrs)^m = (pq)^m \times (rs)^m = p^m \times q^m \times r^m \times s^m$.

Ebenso ist vermöge des Begriffs der Division $q : 1 = p : \frac{p}{q}$; folglich $q^m : 1 = p^m : \left[\frac{p}{q}\right]^m$ und mithin $\left[\frac{p}{q}\right]^m = \frac{p^m}{q^m}$ (§. 47.).

§. 172.

Aus einem Producte oder einem Quotienten wird die Wurzel von einem verlangten Grade gezogen, wenn man aus jedem Theile des Products oder des Quotienten die verlangte Wurzel auszieht, und diese Wurzeln gehörig mit einander verbindet.

$$\text{Z. B. } \sqrt[m]{pqrs} = \sqrt[m]{p}\,\sqrt[m]{q}\,\sqrt[m]{r}\,\sqrt[m]{s}.$$

Denn da $1 : a = b : ab$ so ist auch

$1 : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b} : \sqrt[m]{ab}$, und mithin $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$. Nun ist $pqrs = pq \times rs$; folglich $\sqrt[m]{(pq \times rs)} = \sqrt[m]{pq} \times \sqrt[m]{rs} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{q} \times \sqrt[m]{r} \times \sqrt[m]{s}$.

Ebenso ist, weil $q : 1 = p : \frac{p}{q}$ auch

$\sqrt[m]{q} : 1 = \sqrt[m]{p} : \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$, und mithin

$$\sqrt[m]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}.$$

§. 173.

Um den Coefficienten einer Potenz von einer vieltheiligen Größe in die Parenthese zu bringen, dividire man den Exponenten desselben mit dem gemeinschaftlichen Exponenten der Potenz und multiplicire mit dem so veränderten Factor alle Glieder der Potenz. Z. B.

$$\sqrt[r]{z}\left(a^{m} \times bx^{n}\right)^{c} = \left(a^{m}\sqrt[c]{z^{r}} + bx^{n}\sqrt[c]{z^{r}}\right)^{c};$$

Denn es ist $z^{\frac{r}{c}} = \left(\sqrt[c]{z^{r}}\right)^{c}$, folglich

$$\sqrt[r]{z}\left[a^{m} + bx^{n}\right]^{c} = \left[z^{\frac{r}{c}}\right]^{c} \times \left[a^{m} + bx^{n}\right]^{c} =$$

$$\left[z^{\frac{r}{c}}\right] \times \left[a^{m} + bx^{n}\right]^{c} = \left[a^{m}z^{\frac{r}{c}} + bxz^{\frac{r}{c}}\right]^{c}.$$

§. 174.

Um hingegen in dem Ausdrucke einer Potenz von einer vieltheiligen Größe einen Factor aus der Parenthese wegzubringen, dividire man alle Glieder der Potenz mit diesem Factor, hierauf multiplicire man seinen Exponenten mit dem gemeinschaftlichen Exponenten der Potenz, uud seze ihn so als Coefficienten vor die Parenthese. Z. B.

$$(a + bx^n)^c = x^{nc} (ax^{m-c} + b)^c;$$

Denn es ist

$$(a + bx^n)^c = \frac{(a + bx^n)^c}{(x^n)^c} \times (x^n)^c = \left[\frac{a + bx^n}{x^n}\right]^c \times (x^n)^c$$

$$= x^{nc} (ax^{m-c} + b)^c.$$

§. 175.

Ausdrücke welche weder ein Wurzelzeichen noch einen gebrochenen Exponenten enthalten, werden Rationalgrößen, solche hingegen, in welchen Wnrzelzeichen oder gebrochene Exponenten, die sich nicht wegschaffen lassen, vorkommen, werden Irrationalgrößen genannt. So sind z. B. $m\sqrt{z}$, $x^{\frac{3}{4}}$ $y^{\frac{1}{2}}$ Irrationalgrößen; hingegen $\sqrt[2]{py}$, $\sqrt[3]{qx}$ Rationalgrößen. Die Irrationalgrößen werden von der Eigenschaft, daß sie Wurzelzeichen enthalten, auch Wurzelgrößen genannt. Diejenige bestimmte oder unbestimmte, einfache oder zusammengesezte Zahl, womit eine Wurzelgröße multiplicirt ist, heißt der Coefficiente derselben. Wenn in mehreren Wurzelgrößen sowohl die unter den Wurzelzeichen stehenden Größen, als die Wurzelexponenten einerley sind, so heißen sie gleichartig oder gleichnamig. Z. B. $m\sqrt[r]{x}$, $n\sqrt[r]{x}$, $p\sqrt[r]{x}$.

Wenn zwey Wurzelgrößen sich zusammen verhalten, wie eine rationale Zahl zu einer andern, so heissen sie unter sich commensurable oder communicirende, wenn sie aber kein solches Verhältniß zu einander haben, so werden sie unter sich incommensurable oder nicht — communicirende genannt.

Ausdrücke, worin nur ein einziges Wurzelzeichen vorkommt, dieses mag sich nun bloß über eine einfache oder über eine aus mehreren Gliedern zusammengesezte Größe erstrecken, heissen Particularwurzeln, solche hingegen, worin ein Wurzelzeichen vorkommt, das über alle Glieder einer vieltheiligen Größe sich erstreckt, von welchen einige selbst wieder irrational sind, werden Universalwurzeln genannt. So sind z. B. $\sqrt[3]{az}$, $\sqrt{(x^2+z^3)}$, $\sqrt{(3a+4b-6d)}$ Particularwurzeln; hingegen $\sqrt{(x^2+2\sqrt{az})}$, $\sqrt{(12+\sqrt{432})}$, $\sqrt{(6+\sqrt{12})}$ Universalwurzeln.

Wenn in der Folge von Wurzelgrößen ohne Beysaz die Rede seyn wird, so werden immer Particularwurzeln zu verstehen seyn, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich angezeigt wird.

§. 176.

Um den Coefficienten einer Wurzelgröße ohne den Werth derselben zu ändern, unter das Wurzelzeichen zu bringen, nehme man die Potenz des Coefficienten welche der Wurzelexponente anzeigt, und multiplicire damit die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe.

z. B. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $\frac{a}{b}\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{ac}{b^3}}$; $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$.

Im Allgemeinen ist $a\sqrt[r]{b^n} = \sqrt[r]{a^{mr} b^n}$; denn

$$\sqrt[m\,r]{a^{n}} \cdot \sqrt[r]{b^{n}} = a\,b^{\frac{n}{r}} = a^{\frac{mr}{r}} \times b^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^{mr}} \times \sqrt[r]{b^{n}}$$

$$= \sqrt[r]{a^{mr}\,b^{n}} \text{ (§. 171.).}$$

§. 177.

Umgekehrt kann, wenn eine unter dem Wurzelzeichen begriffene Größe, eine Potenz von dem Grade den der Wurzelexponente anzeigt, als Factor enthält, dieser Factor unter dem Wurzelzeichen dadurch weggebracht werden, daß man mit seiner Wurzel den Coefficienten der Wurzelgröße multiplicirt. Z. B. $a\sqrt[n]{b^{n}c}$

$$= ab\sqrt[n]{c};$$

$$a\sqrt[3]{\left[\frac{b^{3}c\,d^{6}}{p^{9}q}\right]} = \frac{abd^{2}}{p^{3}}\sqrt[3]{\frac{c}{q}}.$$

Ist die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe eine bestimmte Zahl, so kann man versuchen sie in einfache Factoren zu zerlegen, und alsdann zusehen, ob ein solcher Factor unter dem Wurzelzeichen so oft vorkommt, als der Wurzelexponente Einheiten hat. Ist dies der Fall, so kann man ihn unter dem Wurzelzeichen eben so oft wegstreichen, und statt dessen einmal als Factor vor das Wurzelzeichen sezen. Durch diese Veränderung der Wurzelgrößen, welche man die Reduction derselben auf einen einfacheren Ausdruck nennt, erhält man in manchen Fällen zugleich den Vortheil, daß ungleichartige Wurzelgrößen dadurch in gleichartige verwandelt werden. Z. B $5\sqrt[3]{3024} =$

$5\sqrt[3]{(2.2.2.2.3.3.3.7)} = 5.2.3\sqrt[3]{2.7} =$

$30\sqrt[3]{14}$; $4\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2.2.2.2} = 4.2\sqrt[3]{2}$

$= 8\sqrt[3]{2}$; $a\sqrt[n]{b^{n}c} = ab\sqrt[n]{c}$; $p\sqrt[n]{q^{2n}c} =$

$pq\sqrt[n]{c}$.

Werden auf solche Art alle Potenzen von dem Grade den der Wurzelexponente anzeigt, aus einer Wurzelgröße weggeschafft, so wird sie dadurch auf den einfachsten Ausdruck gebracht.

So war in dem vorigen Beyspiele $30\sqrt[3]{14}$ der einfachste Ausdruck für die Größe $5\sqrt[3]{3024}$; eben so ist $2abc^2$ der einfachste Ausdruck für die Größe $\sqrt[3]{16a^3b^2c}$.

§. 178.

Ob zwey gegebene Wurzelgrößen von gleichen Wurzelexponenten unter sich commensurabel seyen, oder nicht kann man auf dreyerley Weise erfahren.

I. Durch die Multiplication.

Wenn man nämlich bey Wurzelgrößen vom 2ten Grade die eine mit der andern, bey solchen vom 3ten die eine mit dem Quadrate der andern, bey solchen vom 4ten die eine mit dem Cubus der andern u. s. w. multiplicirt, und zum Producte eine Potenz von demselben Grade erhält, den der gemeinschaftliche Wurzelexponente der gegebenen Wurzelgrößen anzeigt, so sind sie unter sich commensurabel, und ihr Verhältniß ist gleich dem der einen unter dem Wurzelzeichen begriffenen Größe zu der gleichnamigen Wurzel aus dem Producte beyder.

So findet man z. B. daß $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$,
weil $2 \cdot 8 = 16$ und $16 = 4^2$, aber $2 : 4 = 1 : 2$.

Ebenso findet man, daß $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{54} = 1 : 3$,
weil $2^2 \cdot 54 = 216 = 6^3$, aber $2 : 6 = 1 : 3$.

II. Durch die Division.

Wenn man die eine der unter dem Wurzelzeichen begriffenen Größen mit der andern dividirt, und zum Quotienten eine Potenz von demselben Grade erhält, den der gemeinschaftliche Wurzelexponente der gegebenen Wurzelgrößen anzeigt, so sind sie unter sich commensurabel, und ihr Verhältniß ist gleich dem der Ein-

heit zu der gleichnamigen Wurzel aus dem Quotienten beyder.

So ist $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$, weil $\frac{8}{2} = 4$ und $1 : \sqrt{4} = 1 : 2$.

Ebenso ist $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{54} = 1 : 3$ weil $\frac{54}{2} = 27$ aber $1 : \sqrt[3]{27} = 1 : 3$.

III. Durch die Reduction der gegebenen Wurzelgrößen auf den einfachsten Ausdruck.

Denn wenn nach dieser Veränderung gleiche Größen unter dem Wurzelzeichen stehen bleiben, so sind die gegebenen Wurzelgrößen unter sich commensurabel und ihr Verhältniß ist dem ihrer Coefficienten in den reducirten Ausdrücken gleich.

So findet man, daß $\sqrt{27a^2} : \sqrt{75a^2} = 3 : 5$

Denn es ist $\sqrt{27a^2} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot a^2} = 3a\sqrt{3}$, und

$\sqrt{75a^2} = \sqrt{3 \cdot 25a^2} = 5a\sqrt{3}$, folglich

$\sqrt{27a^2} : \sqrt{75a^2} = 3a\sqrt{3} : 5a\sqrt{3} = 3a : 5a = 3 : 5$.

§. 179.

Jede Potenz (n) einer gegebenen Wurzelgröße zu finden behalte man den Wurzelexponenten ungeändert und erhebe sowohl den Coefficienten, als die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe auf die verlangte Potenz.

Z. B. $(2\sqrt[3]{5})^2 = 4\sqrt[3]{25}$. $(a\sqrt[r]{b})^n = a^n\sqrt[r]{b^n}$;

Denn es ist $a\sqrt[r]{b} = ab^{\frac{1}{r}}$; folglich $(a\sqrt[r]{b})^n = (ab^{\frac{1}{r}})^n = a^n b^{\frac{n}{r}} = a^n\sqrt[r]{b^n}$.

Lässet sich der Wurzelexponente durch den Exponenten der verlangten Potenz dividiren, so erhält man

durch diese Division einfachere Ausdrücke. Z. B. $(2\sqrt[4]{5})^2 = 4\sqrt{5}$. Denn es ist allgemein

$$(a\sqrt[nr]{b})^n = a^n\sqrt[nr]{b^n} = a\,b^{\frac{n}{nr}} = a\,b^{\frac{1}{r}} = a\sqrt[r]{b}.$$

Soll eine Wurzelgröße auf eben die Potenz, welche der Wurzelexponente anzeigt, erhoben werden, so wird diese Potenz ein rationales Product aus eben der Potenz des Coefficienten in die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe. Z. B. $(a\sqrt[3]{5})^3 = 5^a$. Denn es ist allgemein $(a\sqrt[n]{b})^n = a^n\sqrt[n]{b^n} = a\,b^{\frac{n}{n}} = a\,b$.

§. 180.

Jede Wurzel (n) von einer gegebenen Wurzelgröße zu finden, bringe man den Coefficienten unter das Wurzelzeichen, und multiplicire alsdann den Wurzelexponenten mit dem Exponenten der verlangten Wurzel.

Z. B. $\sqrt[3]{(2\sqrt{5})} = \sqrt[6]{20}$; $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{6})} = \sqrt[4]{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

Denn es ist $a\sqrt[r]{b} = ab^{\frac{1}{r}}$; folglich $\sqrt[n]{(a\sqrt[n]{b})} = \sqrt[n]{ab^{\frac{1}{r}}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{nr}} = a^{\frac{r}{nr}}b^{\frac{1}{nr}} = \sqrt[nr]{a^r}\sqrt[nr]{b} = \sqrt[nr]{a^r}\,b$.

Wenn der Exponente des Coefficienten und der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe durch den Exponenten der verlangten Wurzel sich dividiren lässet, so erhält man dadurch einfachere Ausdrücke. Z. B.

$\sqrt[3]{(a^6\sqrt[5]{b^3})} = a^{\frac{6}{3}}\sqrt[5]{b^{\frac{3}{3}}} = a^2\sqrt[5]{b}$, u. allgemein

$\sqrt[n]{(a^m\sqrt[r]{b^s})} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt[r]{b^{\frac{s}{n}}}$; denn dies ist immer $=$

$a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{s}{nr}} = a^{\frac{mr}{nr}}b^{\frac{s}{nr}} = \sqrt[rn]{a^{mr}}\sqrt[nr]{b^s} = \sqrt[nr]{a^{mr}}\sqrt[nr]{b^s} =$

$\sqrt[n]{(a^m\sqrt[r]{b^s})}$.

§. 181.

Um eine gegebene Wurzelgröße $(a\sqrt[n]{b})$ mit einer andern Größe (c^n) ohne Aenderung ihres Werthes zu multipliciren, multiplicire man die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe b mit der Potenz von c, welche der Wurzelexponente n anzeigt, und dividire den Coefficienten der Wurzelgröße mit der Größe c. Z. B.

$$2\sqrt{7} = \frac{2}{5}\sqrt{7 \cdot 5^2} = \frac{2}{5}\sqrt{7 \cdot 25} = \frac{2}{5}\sqrt{175}.$$

Denn es ist allgemein $a\sqrt[n]{b} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{bc^n} = a\sqrt[n]{\frac{bc^n}{c^n}}$.

Hätte die gegebene Wurzelgröße keinen Coefficienten, so würde der Coefficiente 1 hinzugedacht. Z. B.

$$\sqrt[3]{11} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{11 \cdot 4^3} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{11 \cdot 64} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{104}.$$

§. 182.

Um eine gegebene Wurzelgröße $(a\sqrt[n]{b})$ mit einer andern Größe (c^n) ohne Aenderung ihres Werthes zu dividiren, dividire man die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe b mit der Potenz von c welche der Wurzelexponente n anzeigt, nnd multiplicire den Coefficienten der Wurzelgröße mit der Größe c.

$$\text{Z. B. } 2\sqrt[3]{5} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{\frac{5}{2^3}} = 4\sqrt[3]{\frac{5}{8}}.$$

Denn es ist allgemein $a\sqrt[n]{b} = ac\sqrt[n]{\frac{b}{c^n}} = a\sqrt[n]{\frac{bc^n}{c^n}}$.

Hätte die gegebene Wurzelgröße keinen Coefficienten, so würde auch hier dir Coefficiente 1 hinzugedacht.

$$\text{Z. B. } \sqrt{648} = 6\sqrt[3]{\frac{648}{6^3}} = 6\sqrt[3]{\frac{648}{216}} = 6\sqrt[3]{3}.$$

§. 183.

Eine Wurzelgröße behält ferner ihren Werth unverändert, wenn man sowohl den Wurzelexponenten, als den Exponenten der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[3]{a^3}$.

Denn es ist allgemein $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$;

und eben so ist $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$.

Hieraus folgt auch $\sqrt[4]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{(\sqrt{a})}$;

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{(\sqrt{a})} = \sqrt{(\sqrt[3]{a})}.$$

§. 184.

Um Wurzelgrößen von verschiedenen Wurzelexponenten ohne Aenderung ihres Werths in solche von einerley Wurzelexponenten zu verwandeln drücke man sie als Potenzen mit gebrochenen Exponenten aus, bringe hierauf diese auf einerley Benennung und verwandle endlich die so veränderten Potenzen wieder in Wurzelgrößen. Z. B.

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{a}\sqrt{b} = ab^{\frac{1}{2}} = ab^{\frac{3}{6}} = a\sqrt[6]{b^3} \\ \sqrt[3]{c}\sqrt{d} = cd^{\frac{1}{3}} = cd^{\frac{2}{6}} = c\sqrt[6]{d^2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{5} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{4}{8}} = 2\sqrt[8]{5^4} = 2\sqrt[8]{625} \\ 3\sqrt[4]{7} = 3 \times 7^{\frac{1}{4}} = 3 \times 7^{\frac{2}{8}} = 3\sqrt[8]{7^2} = 3\sqrt[8]{49} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{12}{24}} = \sqrt[24]{3^{12}} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{8}{24}} = \sqrt[24]{7^8} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{6}{24}} = \sqrt[24]{5^6} \end{array}\right.$$

§. 185.

Es giebt Fälle, wo man den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten mehrerer gegebenen Wurzelgrößen durch andere Mittel kleiner erhalten kann, als nach der Methode des vorigen §.

So kann man im zweyten Beyspiele bey der Grösse $2\sqrt{5}$ den Wurzelexponenten 2 und den Exponenten 1 der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Zahl 5 mit 2 multipliciren, da dann $2\sqrt[4]{5^2} = 2\sqrt[4]{25}$ daraus entsteht, die mit der andern $3\sqrt[4]{7}$ schon einerley Exponeuten hat.

Wenn also bey zwey gegebenen Wurzelgrößen der Wurzelexponente der einen ein Vielfaches von dem der andern ist, so ist es, um sie auf einerley Wurzelexponenten zu bringen, genug, den größeren Exponenten mit dem kleineren zu dividiren, und mit dem erhaltenen Quotienten bey der Wurzelgröße welche den kleineren Wurzelexponenten hat, sowohl den Exponenten der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe, als den Wurzelexponenten zu multipliciren.

Ueberhaupt, wenn es eine Zahl giebt, die sich durch die Wurzelexponenten aller gegebenen Wurzelgrößen ohne Rest theilen lässet, so erhält man viel einfachere Ausdrücke, wenn man diese Zahl znm gemeinschaftlichen Wurzelexponenten annimmt, und die Exponenten jeder unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe mit dem Quotienten multiplicirt, welchen die Division des angenommenen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten durch deu Wurzelexponenten eben dieser Größe giebt.

Man sieht leicht, daß es dabey am vortheilhaftesten ist, die kleinste meßbare Zahl (§. 79. 80.) der gegebenen Wurzelexponenten zum gemeinschaftlichen Wurzelexponenten anzunehmen.

So ist im dritten Beyspiele des vorigen §. die Zahl 12 durch die sämmtlichen Wurzelexponenten 2, 3, 4 theilbar, und sie ist zugleich die kleinste meßbare Zahl derselben; daher findet man

$$\sqrt[12]{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$$
$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}.$$

§. 186.

Gleichartige Wurzelgrößen werden addirt oder subtrahirt indem man die Summe oder Differenz ihrer Coefficienten sucht, und solche der gegebenen Wurzelgröße als Coefficienten vorsezt. Bey ungleichartigen kann die Addition und Subtraction bloß durch die Zeichen angedeutet werden.

$$\text{z. B. } 7\sqrt{8} + 5\sqrt{8} = 12\sqrt{8} = 24\sqrt{2}.$$
$$4\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$
$$11\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7}$$
$$\frac{2}{3}\sqrt{11} - \frac{3}{7}\sqrt{11} = \frac{14}{21}\sqrt{11} - \frac{9}{21}\sqrt{11}$$
$$= \frac{5}{21}\sqrt{11}.$$

$$a + 2\sqrt{ab} + 3\sqrt[3]{ac} - 4\sqrt{ad} = A$$
$$b - 5\sqrt{ab} + 9\sqrt[3]{ac} + 2\sqrt{ad} = B$$

$$a + b - 3\sqrt{ab} + 12\sqrt[3]{ac} - 2\sqrt{ad} = A + B$$
$$a - b + 7\sqrt{ab} - 6\sqrt[3]{ac} - 6\sqrt{ad} = A - B.$$

Denn es ist allgemein

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$ genommen amal

$c\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$ genommen cmal; folglich

$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$ genommen $(a + c)$mal $= (a + c)\sqrt[n]{b}$, u.

$a\sqrt[n]{b} - c\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$ genommen $(a - c)$ mal $= (a - c)\sqrt[n]{b}$.

Bisweilen sind, die Wurzelgrößen bloß in der Form, worin ihre Ausdrücke gegeben sind, ungleichartig und lassen sich durch die Reduction (§. 177.) leicht in gleichartige verwandeln. Z. B.

$$\sqrt[4]{a^2 b} + \sqrt{bc^2} = a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a + c)\sqrt{b}$$

$$8\sqrt[3]{128} - 5\sqrt[3]{16} = 8\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$8 \cdot 4\sqrt[3]{2} - 5 \cdot 2\sqrt[3]{2} = 32\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} = (32 - 10)\sqrt[3]{2}$$

$$= 22\sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$$

$$(5 - 3)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt[4]{4} = 2\sqrt[4]{2^2} + 3\sqrt[4]{2^2} = (2 + 3)\sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt[4]{2^2}$$

$$= 5 \cdot 2^{\frac{2}{4}} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}.$$

§. 187.

Um Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren hat man

1) bey einfachen Factoren von gleichen Wurzelexponenten (a) die Coefficienten und (b) die unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größen jede besonders mit einander zu multipliciren;

2) bey einfachen Factoren von ungleichen Wurzelexponenten die leztern erst nach §. 180 gleich zu machen, und dann nach 1) zu multipliciren;

3) bey zusammengesezten Factoren jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des andern nach 1) u. 2) zu multipliciren und dann die Partialproducte zu addiren Z. B.

$$a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd};\ 3\sqrt{6} \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{12} =$$

$$24\sqrt{3};$$

$\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{pr}{qs}\sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}$; $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} =$

$3\sqrt[3]{5}$; $5\sqrt[3]{3} \times \sqrt{6} = 5\sqrt[6]{9} \times \sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}$.

$2\sqrt[3]{5} \times 7\sqrt{3} = 2\sqrt[6]{5^2} \times 7\sqrt[6]{3^3} = 2\sqrt[6]{25} \times 7\sqrt[6]{27}$

$= 14\sqrt[6]{675}$.

$(a\sqrt{5} - 6\sqrt{3})(8 - \frac{1}{2}\sqrt{7}) = 8a\sqrt{5} - 48\sqrt{3} -$

$\frac{1}{2}a\sqrt{35} + 3\sqrt{21}$.

$(3\sqrt{ab} - \sqrt{c})\ a\sqrt{bc} = 3a\sqrt{abc^2} - a\sqrt{bc^2} =$

$3ab\sqrt{ac} - ac\sqrt{b}$.

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} - \sqrt{b^2}$

$= a - b$.

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{9} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{4}$

$= 3 - 2 = 1$.

Denn es ist allgemein

$a\sqrt[n]{b} = a \times \sqrt[n]{b}$, $c\sqrt[n]{d} = c \times \sqrt[n]{d}$; folglich

$a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$.

§. 188.

Um der, für die Anwendung fruchtbaren Bemerkungen willen, die sich dabey darbieten werden, wird es gut seyn, noch folgende Irrationalgrößen mit einander zu multipliciren.

I. $\sqrt{50} + \sqrt{72}$ mit $\sqrt{50} + \sqrt{72}$ d. i.

$\sqrt{2.25} + \sqrt{2.36}$ mit $\sqrt{2.25} + \sqrt{2.36}$ oder

$5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ mit $5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ oder

$11\sqrt{2}$ mit $11\sqrt{2}$.

Das Product $121 . 2 = 242$ zeigt, daß die Summe der beyden Wurzeln $\sqrt{50}$ u. $\sqrt{72} = \sqrt{242}$ sey, weil das Quadrat dieser Summe $= 242$ ist.

II. $\sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{3}$ mit $\sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{3}$ d. i. $\sqrt{3.25} + \sqrt{3.16} + \sqrt{3}$ mit $\sqrt{3.25} + \sqrt{3.16} + \sqrt{3}$ oder $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$ mit $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$ oder $10\sqrt{3}$ mit $10\sqrt{3}$.

Das Product $100.3 = 300$ zeigt, daß die Summe der drey Wurzeln $\sqrt{75}$, $\sqrt{48}$ und $\sqrt{3} = \sqrt{300}$ sey, weil das Quadrat dieser Summe $= 300$ ist.

III. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ mit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \hline 2 + \sqrt{6} \\ + \sqrt{6} + 3 \\ \hline 5 + 2\sqrt{6} \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß das Quadrat einer zweytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade auch zweytheilig ist.

IV. $5 + 2\sqrt{6}$ mit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 5 + 2\sqrt{6} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \hline 5\sqrt{2} + 2\sqrt{12} \\ + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{18} \\ \hline 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3.4} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2.9} = \\ 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \\ 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}. \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß auch der Cubus einer zweytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade gleichfalls zweytheilig ist.

Das nämliche gilt von allen höheren Potenzen zweytheiliger Wurzelgrößen, so lange bloß von nicht-communicirenden Wurzelgrößen des zweyten Grads die Rede ist.

Denn daß die Theile von den höheren Potenzen communicirender Wurzelgrößen eben dieses Grads rationale Producte und daher diese Potenzen selbst eintheilige rationale Größen werden, zeigen die Beyspiele I. und II.

V. $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} + \sqrt{2} \\ \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ \hline 5 + \sqrt{10} \\ \quad - \sqrt{10} - 2 \\ \hline 5 - 2 = 3 \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß wenn man in einer zweytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade das Zeichen eines Glieds ändert und mit der so veränderten die gegebene multiplicirt, das Product eine eintheilige rationale Größe wird.

VI. $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline 5 + \sqrt{15} + \sqrt{10} \\ + \sqrt{15} + 3 + \sqrt{6} \\ \quad - \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2 \\ \hline 6 + 2\sqrt{15} \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß, wenn man in einer dreytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade das Zeichen eines Glieds ändert, und mit der so veränderten die gegebene multiplicirt, das Product eine zweytheilige, zum Theil rationale, Größe wird.

VII. $\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline 6 + \sqrt{30} - \sqrt{18} + \sqrt{12} \\ - \sqrt{30} - 5 + \sqrt{15} - \sqrt{10} \\ \quad - \sqrt{18} - \sqrt{15} + 3 - \sqrt{6} \\ \quad - \sqrt{12} - \sqrt{10} + \sqrt{6} - 2 \\ \hline 2 = 2\sqrt{18} - 2\sqrt{10} \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß, wenn man in einer viertheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade die Zeichen von zwey Gliedern ändert, und mit der so veränderten die gegebene multiplicirt, das Product eine dreytheilige, zum Theil rationale, Größe wird.

§. 189.

Aus den Resultaten V — VII. des vorigen §. folgt eine vortheilhafte Methode, einen, ganz oder zum Theil irrationalen, Nenner eines Bruchs, wenn die Wurzelgrößen den zweyten Grad nicht übersteigen, und die Zahl seiner Glieder nicht größer, als 4, ist, in einen rationalen zu verwandeln. Man verwandelt nämlich durch das dort gefundene Mittel den viertheiligen Nenner erst in einen dreytheiligen, hierauf den dreytheiligen in einen zweytheiligen und diesen in einen eintheiligen rationalen, und multiplicirt alsdann auch den Zähler des Bruchs der Reihe nach mit eben den Factoren, womit man den Nenner multipliciren mußte, um ihn rational zu machen.

Zu Anwendungen dieser Methode wird uns die Division der Irrationalgrößen bald Gelegenheit geben.

§. 190.

Um Wurzelgrößen mit einander zu dividiren hat man

1) bey einfachen Größen (Divisor und Dividendus) von gleichen Wurzelexponenten (a) den Coefficienten des Dividendus durch den Coefficienten des Divisors, (b) die unter dem Wurzelzeichen begriffene Größe des Dividendus durch die des Divisors zu dividiren;

2) bey einfachen Größen von ungleichen Wurzelexponenten die lezteren erst nach §. 181. gleich zu machen, und dann nach 1) zu dividiren;

3) bey zusammengesezten Größen die Division ebenso, wie bey Rationalgrößen, nach §. 160. zu verrichten. Z. B.

$$a\sqrt[n]{b} : c\sqrt[n]{d} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}; \frac{p}{q}\sqrt[r]{\frac{a}{b}} : \frac{m}{n}\sqrt[r]{\frac{c}{d}} = \frac{pn}{qm}\sqrt[r]{\frac{ad}{bc}}.$$

$$5b : 25\sqrt{c} = \frac{5b}{25\sqrt{c}} = \frac{b}{5\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b^2}}{5\sqrt{c}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{b^2}{c}} = \frac{b}{5}\sqrt{\frac{1}{c}}.$$

$$ab : c\sqrt{b} = \frac{ab}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b^2}}{c\sqrt{b}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2}{b}} = \frac{a}{c}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$2\sqrt[3]{6} : 3\sqrt[6]{9} = 2\sqrt[6]{6^3} : 3\sqrt[6]{9^2} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{6^3}{9^2}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}.$$

$$(\sqrt{54} - \sqrt{24}) : \sqrt{6} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} - \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

$$(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} - \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

$$\sqrt{(x^2 - z^2)} : (x + z) = \frac{\sqrt{(x^2 - z^2)}}{\sqrt{(x+z)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 - z^2)}{(x+z)^2}} = \sqrt{\frac{(x+z)(x-z)}{(x+z)^2}} = \sqrt{\frac{(x-z)}{(x+z)}} = \frac{\sqrt{(x-z)}}{\sqrt{(x+z)}}.$$

$$\frac{\sqrt{4ax}+\sqrt{6ax^2}}{\sqrt{2ax}}=\sqrt{\left(\frac{4ax}{2ax}\right)}+\sqrt{\left(\frac{6ax^2}{2ax}\right)}=\sqrt{2}+\sqrt{3x}.$$

$$\frac{4a+8\sqrt{ac}-9b+12\sqrt{bc}}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}+4\sqrt{c}}=2\sqrt{a}+3\sqrt{b}.$$

$$\frac{\sqrt{48}-\sqrt{24}-\sqrt{18}+3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\sqrt{18}-\sqrt{3}.$$

Denn es ist allgemein

$a\sqrt[n]{b}=a\times\sqrt[n]{b}$, $c\sqrt[n]{d}=c\times\sqrt[n]{d}$; folglich

$$a\sqrt[n]{b}:c\sqrt[n]{d}=\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\times\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

(§. 172.)

§. 191.

Wenn bey der Division der Irrationalgrößen der Divisor und Dividendus, wie im dritten Falle des vorigen §. beyde zusammengesezte Größen sind, und nur Wurzelgrößen vom zweyten Grade enthalten, auch der Divisor nicht mehr als vier Glieder hat, so findet man den Quotienten in vielen Fällen bequemer, als nach der Methode des vorigen §. dadurch, daß man den Dividendus als den Zähler uud den Divisor als den Nenner eines Bruches betrachtet, den lezteren nach §. 189. rational macht, und hierauf mit diesem rationalen Divisor den nach §. 189. veränderten Dividendus dividirt. Z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{c^2b}-\sqrt[2]{c^2bd}+\sqrt[2]{d^2cm}-\sqrt[2]{d^2m}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}=$$

$$\frac{(\sqrt[3]{c^2b}-\sqrt[2]{cbd}+\sqrt[2]{d^2cm}-\sqrt[3]{d^3m})\,(\sqrt{c}+\sqrt{d})}{(\sqrt{c}-\sqrt{d})\,(\sqrt{c}+\sqrt{d})}=$$

$$\frac{\sqrt[2]{c^2b}+cd\sqrt{m}-cd\sqrt{b}-\sqrt[2]{d^2m}}{c-d}=c\sqrt{b}+d\sqrt{m}.$$

$$\frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{15}-3\sqrt{10}-5}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}=$$

$$\frac{(6\sqrt{6}+2\sqrt{15}-3\sqrt{10}-5)(3\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})}=$$

$$\frac{18\sqrt{12}-9\sqrt{20}-2\sqrt{75}+5\sqrt{5}}{18-5}=$$

$$\frac{18\sqrt{3.4}-9\sqrt{5.4}-2\sqrt{3.25}+5\sqrt{5}}{13}=$$

$$\frac{2.18\sqrt{3}-2.9\sqrt{5}-2.5\sqrt{3}+5\sqrt{5}}{13}=$$

$$\frac{36\sqrt{3}-18\sqrt{5}-10\sqrt{3}+5\sqrt{5}}{13}=\frac{26\sqrt{3}-13\sqrt{5}}{13}$$

$$=2\sqrt{3}-\sqrt{5}.$$

$$\frac{7\sqrt{15}+5\sqrt{6}-4\sqrt{10}-16}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$$

$$\frac{(7\sqrt{15}+5\sqrt{6}-4\sqrt{10}-16)(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=$$

$$\frac{18\sqrt{30}+2\sqrt{5}+33\sqrt{3}-38\sqrt{2}}{6\sqrt{10}+11}=$$

$$\frac{(18\sqrt{30}+2\sqrt{5}+33\sqrt{3}-38\sqrt{2})(6\sqrt{10}-11)}{(6\sqrt{10}+11)(6\sqrt{10}-11)}=$$

$$\frac{378\sqrt{2}+717\sqrt{3}-478\sqrt{5}}{239}=$$

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}.$$

$$\frac{\sqrt{32}+\sqrt{24}+2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=$$

$$\frac{(\sqrt{32}+\sqrt{24}+2)(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}=$$

$$\frac{10\sqrt{3}+22}{6\sqrt{3}+4} = \frac{(10\sqrt{3}+22)(6\sqrt{3}-4)}{(6\sqrt{3}+4)(6\sqrt{3}-4)} =$$

$$\frac{92\sqrt{3}+92}{92} = \sqrt{3}+1.$$

§. 192.

Jede Potenz von einem geraden Exponenten ist positiv, die Wurzel mag positiv oder negativ seyn; hingegen ist jede Potenz von einem ungeraden Exponenten positiv oder negativ, je nachdem die Wurzel positiv oder negativ ist.

Denn ist die Wurzel a positiv, so ist ihr Quadrat $= +a \times +a = +a^2$; und ist die Wurzel a negativ, so ist ihr Quadrat $= -a \times -a = +a^2$.

Hingegen ist der Cubus der positiven Wurzel a $= +a \times +a \times +a = +a^2 \times +a = +a^3$; aber der Cubus der negativen Wurzel a ist $= -a \times -a \times -a = +a^2 \times -a = -a^3$. Da nun, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $2n$ jede gerade Zahl vorstellt, so ist a^{2n} ein allgemeiner Ausdruck für jede Potenz der Wurzel a von einem geraden Exponenten. Es ist aber $a^{2n} = (a^2)^n$, d. h. jede Potenz der Wurzel a von einem geraden Exponenten $2n$ ist anzusehen als die nte Potenz des Quadrats von a, welches, nach dem Bewiesenen, jedesmal positiv ist, oder als ein Product aus n Factoren, deren jeder dem positiven Quadrate von a gleich ist, folglich ist jede Potenz der Wurzel a von einem geraden Exponenten, als ein Product aus lauter positiven Factoren, auch positiv.

Hingegen stellt $2n+1$ jede ungerade Zahl vor, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und a^{2n+1} ist also ein allgemeiner Ausdruck für jede Potenz der Wurzel a von einem ungeraden Exponenten. Da nun $(+a)^{2n+1} =$

$(+a)^{2n} \times +a$, aber $(+a)^{2n}$, nach dem Bewiesenen, allemal positiv ist, so muß $(+a)^{2n+1}$, als ein Product aus zwey positiven Factoren, allemal positiv seyn. Dagegen ist $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \times -a$. Da nun $(-a)^{2n}$, nach dem Bewiesenen, allemal positiv ist, so ist $(-a)^{2n+1}$, als ein Product aus einem positiven Factor in einen negativen, allemal negativ.

§. 193.

Aus dem Saze des vorigen §. fließt eine Reihe von Folgerungen, die wir, ihrer Wichtigkeit wegen, hier zusammenstellen wollen.

I. Jede negative Potenz einer negativen Zahl ist, je nachdem der Exponente gerade oder ungerade ist, ein positiver oder negativer Bruch, der zum Zähler hat die Einheit und zum Nenner dieselbe Potenz mit demselben, aber positiven, Exponenten. Z. B.

$$(-a)^{-6} = \frac{1}{(-a)^6} = \frac{1}{a^6}. \quad \text{Hingegen}$$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)^3} = \frac{1}{-(a)^3} = -\frac{1}{a^3}.$$

II. Jede Wurzel von einem geraden Exponenten aus einer positiven Zahl kann sowohl positiv als negativ seyn. Z. B.

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$$

III. Jede Wurzel von einem geraden Exponenten aus einer negativen Zahl ist unmöglich. Denn, man möchte sie positiv oder negativ annehmen, so müßte jede Potenz von ihr, die einen geraden Exponenten hat, nach dem vorigen §. immer positiv werden. Von einer negativen Potenz kann also eine Wurzel, die einen geraden Exponenten hat, weder positiv noch negativ seyn; folglich ist

sie, als eine wirkliche Größe, überall nicht gedenkbar, d. h. sie ist unmöglich oder eingebildet (quantitas impossibilis s. imaginaria). Z. B. $\sqrt{} - a$, $\sqrt[2n]{} - 36$, $\sqrt[2n]{} - a$.

IV. Jede Wurzel von einem ungeraden Exponenten aus einer positiven Zahl ist positiv. Z. B. $\sqrt[2n+1]{} + a = + \sqrt[2n+1]{} a$.

V. Jede Wurzel von einem ungeraden Exponenten aus einer negativen Zahl ist eine zwar negative, aber allemal mögliche Größe. Z. B. $\sqrt[2n+1]{} - a = - \sqrt[2n+1]{} a$.

VI. Jede Wurzel von einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, der zum Zähler hat die Einheit, und zum Nenner dieselbe Wurzel mit demselben, aber positiven, Exponenten. Denn

es ist immer $\sqrt[-n]{} a = a^{\frac{1}{-n}} = - a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Dabey lassen sich nun wieder folgende Fälle unterscheiden:

1) ist die Zahl a positiv und der Wurzelexponente gerade, so kann der Bruch so wohl positiv als negativ seyn. Dies drückt die Formel aus $\sqrt[-2n]{} + a = \pm \sqrt[-2n]{} a = \pm \frac{1}{\sqrt[2n]{a}}$.

2) ist die Zahl a negativ und der Wurzelexponente gerade, so ist der Ausdruck unmöglich. Z. B. $\sqrt[-2n]{} - a = \frac{1}{\sqrt[2n]{-a}}$.

3) ist die Zahl positiv und der Wurzelexponente ungerade, so ist der Bruch positiv. Dies zeigt die Formel

$$\sqrt[-(2n+1)]{+a} = +\sqrt[-(2n+1)]{a} = +\frac{1}{\sqrt[2n+1]{a}}.$$

4) ist die Zahl negativ und der Wurzelexponente ungerade, so ist der Bruch negativ. Dies deutet die Formel an

$$\sqrt[-(2n+1)]{-a} = -\sqrt[-(2n+1)]{a} = -\frac{1}{\sqrt[2n+1]{a}}.$$

VII. Aus den Säzen II — V. läßet sich der Werth der Potenzen negativer Wurzeln, die gebrochene Exponenten haben, leicht bestimmen.

Es ist nämlich

$$(-a)^{\frac{2m}{2n}} = \pm a^{\frac{2m}{2n}}.$$

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} \text{ ist unmöglich.}$$

$$(-a)^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n+1}} = -a^{\frac{2m+1}{2n+1}}.$$

VIII. Eben dieses gilt auch von Potenzen negativer Wurzeln, deren Exponenten negative Brüche sind.

Es ist nämlich

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n}} = \pm\frac{1}{a^{\frac{2m}{2n}}} = \pm a^{-\frac{2m}{2n}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n}}, \text{ unmöglich.}$$

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n+1}} = +\frac{1}{a^{\frac{2m}{2n+1}}} = +a^{-\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n+1}} = -\frac{1}{a^{\frac{2m+1}{2n+1}}} = -a^{-\frac{2m+1}{2n+1}}.$$

IX. Wurzeln, deren Exponenten negative Brüche sind, aus negativen Größen lassen sich leicht in Potenzen eben dieser negativen Größen, deren Exponenten negative Brüche sind, verwandeln, und alsdann kann ihr Werth nach VIII. bestimmt werden. Z. B.

$$\sqrt[n]{-a} = (-a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(-a)^{\frac{m}{n}}} = (-a)^{-\frac{n}{m}}.$$

§. 194.

Obgleich die unmöglichen Größen eigentlich nichts anders, als Zeichen eines Widerspruchs in den Bedingungen einer Aufgabe sind, so ist es doch oft von Wichtigkeit, ihnen, wenigstens in der Vorstellung, die Form wirklicher Größen zu leihen, einmal um den Sätzen die höchste Allgemeinheit zu geben, und dann auch weil in der That wirkliche Größen aus ihnen werden, so oft in der Rechnung die Irrationalität verschwindet, welche den Grund ihrer Unmöglichkeit enthielt. Es ist daher als ein besonderer Vorzug unserer allgemeinen Rechnungssprache anzusehen, daß sie uns auch zu Bezeichnung dieser Art von Größen bequeme Charaktere darbietet, die es uns möglich machen, sie allen arithmetischen Operationen ebensogut wie die wirklichen Größen zu unterwerfen.

§. 195.

Die unmöglichen Größen werden ebenso, wie die Irrationalgrößen nach §. 186, 187, 190, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt; nur mit dem Unter-

schiede, daß man bey der Multiplication und Division unmöglicher Größen, ebenso wie bey ihrer Addition und Subtraction, bloß auf die den Wurzelzeichen vorgesezten Beziehungszeichen (+ und —) zu sehen hat, und das, den unter dem Wurzelzeichen stehenden Grösen vorgesezte, Zeichen — nie verändert werden kann, so lange die Irrationalität nicht verschwindet. Dies folgt einmal aus der bestimmten Bedeutung welche dieses Zeichen hier hat, und vermöge welcher $\sqrt[2n]{\ }-a$ gewissermaßen als ein untheilbares Zeichen anzusehen ist, dann aber auch daraus, daß, wenn man das Gegentheil zulassen, und dieses Zeichen nach eben den Regeln, wie es bey möglichen Größen geschiehet, ändern wollte, man oft aus unmöglicheu Factoren ein mögliches Product, oder aus einem unmöglichen Divisor und Dividendus einen möglichen Quotienten erhalten würde; welches offenbar ungereimt ist.

Uebrigens verdient diese Regel eine desto größere Aufmerksamkeit, da viele angesehene und beliebte Schriftsteller theils sie übersehen, theils das Gegentheil ausdrücklich zur Regel gemacht haben, und dadurch in offenbare Ungereimtheiten gefallen sind.

Beyspiele.

a) Der Addition.

$$\begin{array}{r} 9\sqrt{\ }-2+13\sqrt{\ }-5-7\sqrt{\ }-12 \\ 3\sqrt{\ }-2-9\sqrt{\ }-5+6\sqrt{\ }-12 \\ \hline 12\sqrt{\ }-2+4\sqrt{\ }-5-\sqrt{\ }-12 \end{array}$$

b) Der Subtraction.

$$\begin{array}{r} 15\sqrt{\ }-6-11\sqrt{\ }-4-8\sqrt{\ }-2 \\ 12\sqrt{\ }-6-12\sqrt{\ }-4-12\sqrt{\ }-2 \\ \hline -\qquad +\qquad +\qquad \\ \hline 3\sqrt{\ }-6+\sqrt{\ }-4+4\sqrt{\ }-2 \end{array}$$

c) Der Multiplication.

$$\begin{array}{cccccccc} \sqrt{-2} & \sqrt{-2} & -\sqrt{-2} & \sqrt{-3} & \sqrt{-3} & \sqrt{-3} & -\sqrt{-3} \\ \sqrt{-3} & -\sqrt{-3} & \sqrt{-3} & \sqrt{-3} & -\sqrt{-3} & \sqrt{-12} & \sqrt{-12} \\ \hline \sqrt{-6} & -\sqrt{-6} & -\sqrt{-6} & -3 & +3 & -6 & +6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -1+\sqrt{-3} & -2-2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} & -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} & +2+2\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 & \quad -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline -2-2\sqrt{-3} & +8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -1-\sqrt{-3} & -2+2\sqrt{-3} \\ -1-\sqrt{-3} & -1-\sqrt{-3} \\ \hline +1+\sqrt{-3} & +2-2\sqrt{-3} \\ \quad +\sqrt{-3}-3 & \quad +2\sqrt{-3}+6 \\ \hline -2+2\sqrt{-3} & +8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{-5}-\sqrt{-7} & \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-3} & \sqrt{-3} \\ \hline \sqrt{-15}-\sqrt{-21} & -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

d) Der Division.

$$\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{-3};\quad \frac{\sqrt{-6}}{-\sqrt{-2}}=-\sqrt{-3}.$$

$$\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{-4};\quad \frac{\sqrt{-12}}{-\sqrt{-3}}=-\sqrt{-4}.$$

$$\frac{-45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6}}{3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2}}=$$

$$\frac{\sqrt{-45}\sqrt{-45}-\sqrt{-2.4.45}+\sqrt{-2.6.45}-\sqrt{-2.6.8}}{\sqrt{-45}-\sqrt{-2.4}}$$

$$\frac{\sqrt{-45}-\sqrt{-2.4})\ \sqrt{-45}\sqrt{-45}-\sqrt{-2.4.45}+\sqrt{-2.6.45}-\sqrt{-2.6.8}}{\sqrt{-45}+\sqrt{-12}\ \ \sqrt{-45}\sqrt{-45}-\sqrt{-2.4.45}}$$

$$-\quad +$$

$$0 \qquad 0 \qquad +\sqrt{-2.6.45}-\sqrt{-2.6.8}$$

$$+\sqrt{-2.6.45}-\sqrt{-2.6.8}$$

$$-\quad +$$

$$0 \qquad 0$$

$$\frac{x^2+z^2}{x+\sqrt{-z^2}} = x-\sqrt{-z^2}.$$

Wenn der Divisor eine zweytheilige oder vieltheilige Größe ist, so kann man die Division auch bequem nach §. 191. verrichten. Z. B.

$$\frac{8}{-1+\sqrt{-3}} = \frac{8(1+\sqrt{-3})}{(-1+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-3})} = \frac{8+8\sqrt{-3}}{-4} = -2-2\sqrt{-3}.$$

$$\frac{76}{6-\sqrt{-2}} = \frac{76(6+\sqrt{-2})}{(6-\sqrt{-2})(6+\sqrt{-2})} = \frac{456+76\sqrt{-2}}{38} = 12+2\sqrt{-2}.$$

§. 196.

Wenn man bey der Rechnung mit irrationalen und unmöglichen Größen auf Schwierigkeiten stößt, oder in Widersprüche verwickelt wird, so kann man dies, wofern man sonst keinen Rechnungsfehler gemacht hat, immer als ein Zeichen ansehen, daß man den allgemeinen Rechnungsregeln irgendwo Gewalt angethan, oder sich eine unstatthafte Ausdehnung derselben erlaubt habe.

Man kann alsdann, um sich wieder zu Recht zu finden, nichts besseres thun, als daß man diese Größen in Potenzen mit gebrochenen Exponenten verwandelt, sie nach den, für die Rechnungsarten mit diesen oben gefundenen, Regeln behandelt, und wenn dann noch ein Anstand übrig bleiben sollte, sie durch alle Veränderungen zurück bis zu ihrem Ursprunge verfolgt.

Auf diesem Wege muß es jedesmal gelingen, die vorkommenden Schwierigkeiten vollständig zu heben, und von den scheinbaren Widersprüchen befriedigende Rechenschaft zu geben.

§. 197.

Wenn man durch die gewöhnliche Division einen Rest, oder, als Resultat einer andern Rechnung einen Bruch von der Form $\frac{1}{1+c}$ erhalten hat, so läßet sich dieser durch fortgesezte Division in eine Reihe verwandeln, wie die nachstehende Rechnung giebt.

$$
\begin{array}{rl}
1+c) & 1 \quad \big) 1 - c + c^2 - c^3 \ldots\ldots \\
 & \underline{1 \pm c} \\
R' & \quad 0 - c \\
 & \quad \underline{- c - c^2} \\
R'' & \quad\quad 0 + c^2 \\
 & \quad\quad \underline{+ c^2 + c^3} \\
R''' & \quad\quad\quad 0 - c^3 \\
 & \quad\quad\quad \underline{- c^3 - c^4} \\
R'''' & \quad\quad\quad\quad 0 + c^4
\end{array}
$$

Man dividirt nämlich den Dividendus mit dem ersten Theile des Divisors, so ist des Quotienten erstes Glied 1; dieses mit dem Divisor multiplicirt, giebt das Product $1 + c$, welches, von dem Dividendus abgezogen, den ersten Rest $R' = -c$ übrig lässet. Daraus erhält man ferner des Quotienten zweytes Glied $-c$, und durch Subtraction des Products aus diesem in den Divisor von dem vorigen Reste, den zweyten Rest $R'' = +c^2$. Daraus ergiebt sich dann weiter des Quotienten drittes Glied $+c^2$ und der dritte Rest $R''' = -c^3$ u. s. w.

Dieses kleine Stück der Rechnung ist schon zureichend, um durch Zusammenstellung der Glieder des Quotienten und der zugehörigen Reste die Gesetze zu finden, nach welchen beyde bey der ganzen weiteren Entwickelung ohne Ende fortlaufen müssen.

Es sind nämlich I. II. III. IV.

Glieder des Quotienten $1 - c + c^2 - c^3$

Reste $-c + c^2 - c^3 + c^4$

Demnach sind die Glieder des Quotienten lauter Potenzen von c, welche so auf einander folgen, daß der Exponente einer jeden um 1 kleiner ist, als die Zahl des Glieds. Die Reste hingegen sind auch lauter Potenzen von c, welche aber so auf einander folgen, daß der Exponente einer jeden um Eins größer ist, als in dem zugehörigen Gliede des Quotienten, oder daß jeder nte Rest gleich ist dem $n+1$ten Gliede des Quotienten. Dabey sind in beyden alle gerade Potenzen positiv, die ungeraden aber negativ.

Nimmt man nun an, daß diese Gesetze für n Glieder des Quotienten richtig seyen, so muß das nte Glied desselben seyn $\mp c^{n-1}$, und es muß zum Reste lassen $\mp c^n$, welcher alsdann bey fortgesezter Division zum folgenden $n+1$ten Gliede des Quotienten giebt $\mp c^n$. Wollte man bey diesem Gliede stehen bleiben

und doch den Quotienten vollständig haben, so müßte man demselben noch den Bruch anhängen $\frac{\pm c^{n+1}}{1+c}$.

Wären nun diese Gesetze für n Glieder des Quotienten wahr, so müßten sie auch für die um Eins grössere Zahl wahr seyn. Nun sind sie aber, wie die vorstehende Rechnung zeigt, für 4 Glieder wahr, also auch für $4+1$ oder 5. Sind sie aber wahr für 5 Glieder, so sind sie auch wahr für $5+1$ oder 6 Glieder, u. s. w. für jede größere Zahl von Gliedern.

§. 198.

Hätte der gegebene Bruch die Form $\frac{1}{1-c}$, so fände man dieselbigen Glieder des Quotienten wie im vorigen §; nur mit dem Unterschiede, daß sie alsdann alle positiv wären.

Wenn aber auch weder im Zähler noch im Nenner des gegebenen Bruchs die Einheit vorkäme, sondern derselbe die Form hätte $\frac{a}{a \pm c}$, so ließe er sich doch leicht auf die Form des vorigen bringen. Denn es ist $\frac{a}{a \pm c} = \frac{1}{1 \pm \frac{c}{a}}$, und man brauchte also um den Quotienten zu erhalten, nur in dem Ausdrucke des vorigen überall an Statt c zu sezen $\frac{c}{a}$.

§. 199.

Um aus dem, in Buchstaben ausgedrückten, Quadrate einer zweytheiligen Größe die Quadratwurzel zu finden, ordne man den ganzen Ausdruck nach einem seiner Buchstaben; alsdann halte man sich bloß an die oben (§. 159.) für das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel gefundene allgemeine Formel, um nach Anleitung derselben aus dem gegebenen Quadrate nach

Man dividirt nämlich den Dividendus mit dem ersten Theile des Divisors, so ist des Quotienten erstes Glied 1; dieses mit dem Divisor multiplicirt, giebt das Product $1 + c$, welches, von dem Dividendus abgezogen, den ersten Rest $R' = -c$ übrig lässet. Daraus erhält man ferner des Quotienten zweytes Glied $-c$, und durch Subtraction des Products aus diesem in den Divisor von dem vorigen Reste, den zweyten Rest $R'' = +c^2$. Daraus ergiebt sich dann weiter des Quotienten drittes Glied $+c^2$ und der dritte Rest $R''' = -c^3$ u. s. w.

Dieses kleine Stück der Rechnung ist schon zureichend, um durch Zusammenstellung der Glieder des Quotienten und der zugehörigen Reste die Gesetze zu finden, nach welchen beyde bey der ganzen weiteren Entwickelung ohne Ende fortlaufen müssen.

Es sind nämlich	I.	II.	III.	IV.
Glieder des Quotienten	1	$-c$	$+c^2$	$-c^3$
Reste		$-c$	$+c^2$	$-c^3$ $+c^4$

Demnach sind die Glieder des Quotienten lauter Potenzen von c, welche so auf einander folgen, daß der Exponente einer jeden um 1 kleiner ist, als die Zahl des Glieds. Die Reste hingegen sind auch lauter Potenzen von c, welche aber so auf einander folgen, daß der Exponente einer jeden um Eins größer ist, als in dem zugehörigen Gliede des Quotienten, oder daß jeder nte Rest gleich ist dem $n+1$ten Gliede des Quotienten. Dabey sind in beyden alle gerade Potenzen positiv, die ungeraden aber negativ.

Nimmt man nun an, daß diese Gesetze für n Glieder des Quotienten richtig seyen, so muß das nte Glied desselben seyn $\pm c^{n-1}$, und es muß zum Reste lassen $\mp c^n$, welcher alsdann bey fortgesezter Division zum folgenden $n+1$ten Gliede des Quotienten giebt $\mp c^n$. Wollte man bey diesem Gliede stehen bleiben

und doch den Quotienten vollständig haben, so müßte man demselben noch den Bruch anhängen $\frac{\pm c^{n+1}}{1+c}$.

Wären nun diese Gesetze für n Glieder des Quotienten wahr, so müßten sie auch für die um Eins grössere Zahl wahr seyn. Nun sind sie aber, wie die vorstehende Rechnung zeigt, für 4 Glieder wahr, also auch für $4+1$ oder 5. Sind sie aber wahr für 5 Glieder, so sind sie auch wahr für $5+1$ oder 6 Glieder, u. s. w. für jede größere Zahl von Gliedern.

§. 198.

Hätte der gegebene Bruch die Form $\frac{1}{1-c}$, so fände man dieselbigen Glieder des Quotienten wie im vorigen §; nur mit dem Unterschiede, daß sie alsdann alle positiv wären.

Wenn aber auch weder im Zähler noch im Nenner des gegebenen Bruchs die Einheit vorkäme, sondern derselbe die Form hätte $\frac{a}{a \pm c}$, so ließe er sich doch leicht auf die Form des vorigen bringen. Denn es ist $\frac{a}{a \pm c} = \frac{1}{1 \pm \frac{c}{a}}$, und man brauchte also um den Quotienten zu erhalten, nur in dem Ausdrucke des vorigen überall an Statt c zu sezen $\frac{c}{a}$.

§. 199.

Um aus dem, in Buchstaben ausgedrückten, Quadrate einer zweytheiligen Größe die Quadratwurzel zu finden, ordne man den ganzen Ausdruck nach einem seiner Buchstaben; alsdann halte man sich bloß an die oben (§. 159.) für das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel gefundene allgemeine Formel, um nach Anleitung derselben aus dem gegebenen Quadrate nach

und nach alles das heraus zu bringen, was von den Theilen der Wurzel bey der Zusammensezung in dasselbe hineingekommen seyn muß. Zu dieser Absicht ziehe man von dem höchsten Theile des Quadrats ab a^2, und seze a als den ersten Theil der gesuchten Wurzel in den Quotienten. Hierauf dividire man das höchste Glied des Rests mit 2a, so erhält man des Quotienten zweyten Theil b. Endlich mache man das Product $(2a + b)b$, und ziehe solches von dem Reste ab, so ist, wenn nichts übrig bleibt, a + b die gesuchte Quadratwurzel Z. B.

$$\begin{array}{r|ll} 4p^2 + 12pq + 9q^2 & a & b \\ \hline a^2 = 4p^2 & 2p + 3q & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + 12pq + 9q^2 \\ 2a = (+\ 4p) + 3q\ (= b) \\ (2a + b)b = +\ 12pq + 9q^2 \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} 25x^2 + 30xz + 9z^2 & a & b \\ \hline a^2 = 25x^2 & 5x + 3z & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + 30xz + 9z^2 \\ 2a = (+\ 10x) + 3z\ (= b) \\ (2a + b)b = +\ 30xz + 9z^2 \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} 36g^2 - 108gh + 81h^2 & a & b \\ \hline a^2 = -36g^2 & 6g - 9h & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 108gh + 81h^2 \\ 2a = (+\ 12g) - 9h\ (= b) \\ (2a + b)b = -\ 108gh + 81h^2 \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array}$$

§. 200.

Hat das gegebene Quadrat, nachdem es auf den einfachsten Ausdruck gebracht und gehörig geordnet worden, mehr als drey Glieder, so hat seine Wurzel mehr als zwey Theile. In diesem Falle suche man zuerst nach dem vorigen §. die ersten zwey Theile $a + b$.

Hierauf seze man $a + b = a'$, dividire das höchste Glied des Rests mit $2a'$ um c zu finden, und ziehe endlich von dem Reste ab $(2a' + c)c$. Bleibt abermal ein Rest, so seze man $a' + c = a''$, dividire den Rest mit $2a''$ um d zu finden, und ziehe endlich $(2a'' + d)d$ ab. Und dieses Verfahren seze man so lange fort, als noch ein Theil der Wurzel zu finden übrig ist. Z. B.

$$p^4 + 6p^3q + 5p^2q^2 - 12pq^3 + 4q^4 \;\big|\; p^2 + 3pq - 2q^2$$

$a = a' = a + b$; b ; c

$a = -p^4$

$0 + 6p^3q + 5p^2q^2$

$2a = (+2p^2) + 3pq \;(= b)$

$(2a + b)b = +6p^3q + 9p^2q^2$

$0 \quad -4p^2q^2 - 12pq^3 + 4q^4$

$2a' = (+2p^2 + 6pq) - 2q^2 \;(= c)$

$(2a' + c)c = -4p^2q^2 + 12pq^3 - 4q^4$

$0 \qquad 0$

$$\overbrace{}^{a'}$$

$$9x^4 - 24x^2y^2 + 12x^2z^2 + 16y^4 - 16y^2z^2 + 4z^4 \;\Big|\; \overset{a}{3x^2} - \overset{b}{4y^2} + \overset{c}{2z^2}$$

$$a^2 = -9x^4$$

$$0 - 24x^2y^2 + 12x^2z^2 + 16y^4$$

$$2a = (+\ 6x^2) - 4y^2 \ (= b)$$

$$(2 + b)\,b = \underset{+}{-}\ 24x^2y^2 \underset{-}{+}\ 16y^4$$

$$0 \qquad + 12x^2z^2 - 16y^2z^2 + 4z^4$$

$$2a' = (+\ 6x^2 - 8y^2) + 2z^2 \ (= c)$$

$$(2a' + c)\,c = \underset{-}{+}\ 12x^2z^2 \underset{+}{-}\ 16y^2z^2 \underset{-}{+}\ 4z^4$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{a}^{a}\ b}^{a'}\ c}^{a''}\ d$$

$$\begin{array}{rl}
 & x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16 \quad \Big\} \; x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\
a^2 = & -x^6 \\
\hline
 & 0 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16 \\
2a = & (+2x^3) + 2x^2 \; (= b) \\
(2a+b)\,b = & \underline{+}\,4x^5 \; \underline{+}\,4x^4 \\
\hline
 & 0 + 6x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16 \\
2a' = & (+2x^3 + 4x^2) + 3x \; (= c) \\
(2a' + c)\,c = & \underline{+}\,6x^4 \; \underline{+}\,12x^3 \; \underline{+}\,9x^2 \\
\hline
 & 0 + 8x^3 + 16x^2 + 24x + 16 \\
2a'' = & (+2x^3 + 4x^2 + 6x) + 4 \; (= d) \\
(2a'' + d)\,d = & \underline{+}\,8x^3 \; \underline{+}\,16x^2 \; \underline{+}\,24x \; \underline{+}\,16 \\
\hline
 & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

§. 201.

Nach der Methode des vorigen §. kann man auch aus einer in Buchstaben ausgedrückten zweytheiligen Größe, die kein vollkommenes Quadrat ist, wie $p^2 \pm q$, die Quadratwurzel durch Näherung finden, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{\overset{a}{p} + \overset{b}{\frac{p}{2p}}}^{a'} - \overset{c}{\frac{q^2}{8p^3}}}^{a''} + \overset{d}{\frac{q^3}{16p^5}}}^{a'''} - \overset{e}{\frac{5q^4}{128p^7}}$$

$$\begin{array}{l} a^2 = p^2 + q \\ \quad\;\; - p^2 \\ \hline \quad\;\; 0 + q \end{array}$$

$$2a = (+2p) + \frac{q}{2p} \,(= b)$$

$$\begin{array}{l} (2a+b)b = \underset{-}{+} q \;\; \underset{-}{+} \frac{q^2}{4p^2} \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \;\; - \frac{q^2}{4p^2} \end{array}$$

$$2a' = \left(+2p + \frac{q}{p}\right) - \frac{q^2}{8p^3} \,(= c)$$

$$\begin{array}{l} (2a'+c)c = \underset{+}{-} \frac{q^2}{4p^2} \underset{+}{-} \frac{q^2}{8p^4} \underset{-}{+} \frac{q^4}{64p^6} \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \;\; + \frac{q^3}{8p^4} - \frac{q^4}{64p^6} \end{array}$$

$$2a'' = \left(+2p + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{4p^3}\right) + \frac{q^3}{16p^5} \,(= d)$$

$$\begin{array}{l} \underset{-}{+} \frac{q^3}{8p^4} \underset{-}{+} \frac{q^4}{16p^6} \underset{+}{-} \frac{q^5}{64p^8} \\ \hline 0 \;\; - \frac{5q^4}{64p^6} + \frac{q^5}{64p^8} \end{array}$$

$$2a''' = \left(+2p + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{4p^3} + \frac{q^3}{8p^5}\right)$$

Sucht man ebenso die Quadratwurzel von $p^2 - q$, so erhält man zwar die nämlichen Glieder des Quotienten, aber die Zeichen werden alle negativ.

§. 202.

Um aus dem, in Buchstaben ausgedrückten, Cubus einer zweytheiligen Größe die Cubikwurzel zu finden, ordne man den ganzen Ausdruck nach einem seiner Buchstaben; alsdann halte man sich bloß an die oben (§. 159.) für den Cubus einer zweytheiligen Wurzel gefundene allgemeine Formel, um nach Anleitung derselben aus dem gegebenen Cubus nach und nach alles das heraus zu bringen, was von den Theilen der Wurzel bey der Zusammensezung in denselben hineingekommen seyn muß. In dieser Absicht ziehe man von dem höchsten Theile des Cubus ab a^3, und seze a als den ersten Theil der gesuchten Wurzel in den Quotienten. Hierauf dividire man das höchste Glied des Rests mit $3a^2$, so erhält man des Quotienten zweyten Theil b. Endlich mache man das Product $\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right) ab$, und ziehe solches von dem Reste ab, so ist, wenn nichts übrig bleibt, a + b die gesuchte Cubikwurzel. Z. B.

$$27p^3 - 54p^2q + 36pq^2 - 8q^3 \;\big|\; 3p - 2q$$

$$\underline{a = 3p \quad b = -2q}$$

$$a^3 = 27p^3$$

$$\underline{-}$$

$$0 - 54p^2q + 36pq^2 - 8q^3$$

$$3a^2 = (+ 27p^2)$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right) ab = -54p^2q + 36pq^2 - 8q^3$$

$$\underline{+ \qquad - \qquad +}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a \quad b \\ 8g^6 + 60g^4k^2 + 150g^2k^4 + 125k^6 \;\big\}\; 2g^2 + 5k^2 \\ a^3 = 8g^6 \\ \hline \\ 0 + 60g^4k^2 + 150g^2k^4 + 125k^6 \\ 3a^2 = (+ 12g^4) \\ \left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = (+ 60g^4k^2 + 150g^2k^4 + 125k^6 \\ \hline \\ 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a \quad b \\ 64x^3 - 288x^2z + 432xz^2 - 216z^3 \;\big\}\; 4x - 6z \\ a^3 = 64x^3 \\ \hline \\ 0 - 288x^2z + 432xz^2 - 216z^3 \\ 3a^2 = (+ 48x^2) \\ \left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = - 288x^2z + 432xz^2 - 216z^3 \\ \hline \\ 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

§. 203.

Hat der gegebene Cubus, nachdem er auf den einfachsten Ausdruck gebracht und gehörig geordnet worden, mehr, als vier Glieder, so hat seine Wurzel mehr, als zwey Theile. In diesem Falle suche man zuerst nach dem vorigen §. die ersten zwey Theile $a + b$. Hierauf seze man $a + b = \bar{a}$, dividire das höchste Glied des Rests mit $3\bar{a}^2$ um c zu finden, und ziehe endlich von dem Reste ab $\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}c$. Bleibt

abermal ein Rest, so seze man $\bar{a} + c = \bar{\bar{a}}$, dividire den Rest mit $3\bar{a}^2$ um d zu finden, und ziehe endlich $\left(3\bar{a} + 3d + \frac{d^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}d$ ab. Und dieses Verfahren seze man so lange fort, als noch ein Theil der Wurzel zu finden übrig ist. Z. B. Es sey zu finden

$$\sqrt[3]{(27m^3 - 54m^2n + 36mn^2 - 8n^3 + 27m^2r - 36mnr + 9mr^2 + 12nr^2 - 6nr^2 + r^3)}$$

Diese Ausdrücke muß man, um für die Rechnung den nöthigen Raum zu gewinnen, so theilen, daß man zuerst nur die Glieder bis mit auf den Cubus des zweyten Theils der Wurzel, und alsdann die übrigen vornimmt.

$$\overbrace{a\ \ b}^{\bar{a}}\ \ c$$

$$27m^3 - 54m^2n + 36mn^2 - 8n^3 \mid 3m - 2n + r$$

$$a^3 = 27m^3$$

$$0 - 54m^2n + 36mn^2 - 8n^3$$

$$3a^2 = (+27m^2)$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = -54m^2n + 36mn^2 - 8n^3$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$+27m^2r - 36mnr + 9mr^2 + 12nr^2 - 6nr^2 + r^3$$

$$3\bar{a}^2 = (+27m^2 - 36mn + 12n^2)$$

$$\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}c = 27m^2r - 36mnr + 9mr^2 + 12nr^2 - 6nr^2 + r^3$$

$$- \quad + \quad - \quad - \quad + \quad -$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

3

$$\sqrt[3]{(8k^3 - 36k^2p + 54kp^2 - 27p^3 + 12k^2q - 36kpq + 27p^2q + 6kq^2 - 9pq^2 + q^3)}$$

$$\overbrace{a \quad b}^{\bar{a}} \quad c$$

$$8k^3 - 36k^2p + 54kp^2 - 27p^3 \Big\{ 2k - 3p + q$$

$$a^3 = 8k^3$$

$$-$$

$$0 - 36k^2p + 54kp^2 - 27p^3$$

$$3a^2 = (+\,12k^2)$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right) ab = -\,36k^2p + 54kp^2 - 27p^3$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$12\bar{a}^2kq - 36kpq + 27pq^2 + 6kq^2 - 9pq^2 + q^3$$

$$3\bar{a}^2 = (12k^2 - 36kp + 27p^2)$$

$$\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}c = 12\bar{a}^2kq - 36kpq + 27pq^2 + 6kq^2 - 9pq^2 + q^3$$

$$- \quad + \quad - \quad - \quad + \quad -$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$\sqrt[3]{(x^6 + 6x^5y + 21x^4y^2 + 44x^3y^3 + 63x^2y^4 + 54xy^5 + 27y^6)}$$

$$\overbrace{a}^{\bar{a}} \quad \overbrace{b}^{a} \quad c$$

$$x^6 + 6x^5y + 21x^4y^2 + 44x^3y^3 \;\big\}\; x^2 + 2xy + 3y^2$$

$$a^3 = x^6$$

$$-$$

$$0 + 6x^5y + 21x^4y^2 + 44x^3y^3$$

$$(+\ 3x^4)$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = 6x^5y + 12x^4y^2 + 8x^3y^3$$

$$- \quad - \quad -$$

$$0 + 9x^4y^2 + 36x^3y^3$$

$$+ 9x^4y^2 + 36x^3y^3 + 63x^2y^4 + 54xy^5 + 27y^6$$

$$3a^2 = (3x^4 + 12x^3y + 12x^2y)$$

$$\left(3a^2 + 3c + \frac{c^2}{a^2}\right) a^2c = + 9x^4y^2 + 36x^3y^3 + 63x^2y^4 + 54xy^5 + 27y^6$$

$$- \quad - \quad + \quad - \quad -$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

§. 204.

Nach der Methode des vorigen §. kann man auch aus einer in Buchstaben ausgedrückten zweytheiligen Größe, die kein vollkommener Cubus ist, wie $p^3 \pm q$, die Cubikwurzel durch Näherung finden, wie die nachstehende Rechnung zeigt.

$$\left.\begin{matrix} \bar{a} \\ \overbrace{\quad\quad} \\ a \quad b \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \bar{a} \\ \overbrace{\quad\quad\quad} \\ a \quad b \quad c \quad d \end{matrix}$$

$$a^3 = -p \left\{ \begin{matrix} p^3 + q \\ \hline + q \end{matrix} \right\} p + \frac{q^2}{3p} - \frac{q^3}{9p^2} + \frac{5q^3}{81p^3} \cdots$$

$$3a^2 = (+3p^2)$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right) ab = + q + \frac{q^2}{3p} + \frac{q^3}{27p^2}$$

$$0 - \frac{q^2}{3p} - \frac{q^3}{27p^2}$$

$$3\bar{a}^2 = \left(+3p^2 + \frac{2q}{p} + \frac{q^2}{3p^4}\right)$$

$$\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c^2}{\bar{a}}\right) \bar{a}c = \begin{matrix} -\frac{q^2}{3} - \frac{6q^3}{6} - \frac{2q^4}{9} - \frac{q^5}{12} - \frac{q^6}{15} \\ +3p^3 + 27p^6 + 27p^9 + 81p^{12} + 729p^{15} \end{matrix}$$

$$0 + \frac{5q^3}{6} + \frac{2q^4}{9} + \frac{q^5}{12} + \frac{q^6}{15}$$

$$27p^6 \quad 27p^9 \quad 81p^{12} \quad 729p^{15}$$

$$3\bar{a}^{-2} = \left(+3p^2 + \frac{2q}{p} - \frac{q^2}{3p^4} - \frac{2q^3}{9p^7} + \frac{q^4}{27p^{10}}\right)$$

2c. 2c.

Sucht man ebenso die Cubikwurzel von $p^3 - q$, so erhält man zwar die nämlichen Glieder des Quotienten, aber die Zeichen werden alle negativ.

Eilfter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Verhältnisse und Proportionen.

§. 205.

Bey dem Vortrage der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen im vierten Abschnitte konnte bloß auf zählbare Größen, und unter diesen selbst nur auf rationale Zahlen, Rücksicht genommen werden, weil es uns dort noch an den nöthigen Mitteln fehlte, die Eigenschaften der Verhältnisse und Proportionen der Größen in derjenigen Allgemeinheit abzuhandeln, wie sie bey vielen andern mathematischen Untersuchungen, und ganz vorzüglich bey der Abhandlung der Lehre von der Aehnlichkeit der räumlich ausgedehnten Größen in der Geometrie vorausgesezt werden muß. Bey diesen macht die Irrationalität der Exponenten der Verhältnisse ganz eigene Schwierigkeiten, welche Euklid im fünften Buche seiner Elemente mit meisterhafter Geschicklichkeit vorläufig zu umgehen gewußt hat, um sie hernach im zehnten Buche durch den Aufwand der ganzen Kraft seines bewunderungswürdigen Tiefsinns vollständig zu heben. Gleichwohl passet die euklidische Theorie der Verhältnisse und Proportionen nicht mehr für den jezigen Zustand der Mathematik, weil sie, aller ihrer Weitläufigkeit und Schwierigkeit ungeachtet, für diesen doch zu eingeschränkt ist. Denn einmal wird Euklids Theorie theils durch die abgesonderte Be-

trachtung der rationalen und irrationalen Verhältnisse, theils durch die bloß geometrische Behandlung beyder so weitläufig und schwierig, daß man sein fünftes und zehntes Buch immer für die dunkelsten und schwersten in den Elementen erklärt hat; zweytens war es ihm doch nicht möglich, solche Irrationallinien darzustellen, die sich auf Wurzeln von andern Graden, als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. w. beziehen, weil die Wege dazu der Elementargeometrie unzugänglich sind. Der neueren Mathematik hingegen ist es gelungen, in den Wurzelgrößen ein Mittel zu finden, alle incommensurabeln Größen vermittelst der symbolischen Construction darzustellen, sie, als Irrationalzahlen unter den Begriff der Zahl zu bringen, und allen arithmetischen Operationen zu unterwerfen; und eben dieses Mittel sezt uns in den Stand, die Theorie der Verhältnisse und Proportionen mit einer unvergleichbar größeren Einfachheit und Leichtigkeit und doch zugleich in der höchsten Allgemeinheit abzuhandeln.

Zu dieser Absicht ist zuerst erforderlich, von einem sorgfältig bestimmten Begriffe des Verhältnisses auszugehen, aus diesem und andern bloß arithmetischen Gründen alsdann hauptsächlich die Säze des fünften Buchs der Elemente, soweit sie die gleichen Verhältnisse betreffen — denn die Betrachtung der ungleichen Verhältnisse ist der neueren Mathematik entbehrlich — abzuleiten, und mit beständiger Rücksicht auf die Irrationalität der Exponenten zu beweisen.

Auf diesem Wege muß dann freylich eine andere Theorie der Proportionen zu Stande kommen, als diejenige ist, welche man bis jezt in den mathematischen Schriften der Teutschen — und diese sind sonst anerkannt die gründlichsten — findet, in welchen, einige Ausnahmen abgerechnet, diejenigen von den Alten, welche die Theorie der Proportionen für die Seele der ganzen Mathematik erklärt haben, diese Seele vergeblich suchen dürften.

§. 206.

Das Verhältniß (ratio) einer Größe A zu einer andern B heißt die Art der Bestimmbarkeit

(modus determinabilitatis) der Quantität der einen aus der Quantität der andern. Die Größen A, B heißen Glieder (termini) des Verhältnisses, und zwar heißt diejenige, welche man zuerst sezt, das vorhergehende oder Vorderglied (antecedens) die andere aber das nachfolgende oder Hinterglied (consequens).

Aus diesem Begriffe des Verhältnisses folgt es unmittelbar, daß die beyden Glieder desselben gleichartig (homogenei) seyn müssen.

§. 207.

Unter den unzählig vielen gedenkbaren Arten, die Quantität einer Größe aus der Quantität einer andern zu bestimmen, sind die einfachsten diejenigen, wobey die Größen selbst ohne eine vorgängige Veränderung unmittelbar mit einander verglichen werden, und die Quantität der einen aus der Quantität der andern dadurch bestimmt wird, daß man angiebt, entweder, um wie viel die eine die andere übertreffe oder von ihr übertroffen werde, oder, wie vielmal die eine die andere enthalte, oder in ihr enthalten sey.

§. 208.

Die Art der Bestimmbarkeit der Quantität einer Größe A aus der Quantität einer andern B, welche durch die Angabe: um wie viel die A die B übertreffe, oder von der B übertroffen werde, bekannt wird, heißt das arithmetische Verhältniß der Größen A und B. Hingegen die Art der Bestimmbarkeit der Quantität einer Größe A aus der Quantität einer andern B, welche durch die Angabe: wie vielmal die A die B enthalte, oder in der B enthalten sey, bekannt wird, heißt das geometrische Verhältniß der Größen A und B.

Mit diesen Namen will man übrigens nicht sagen, daß das eine dieser Verhältnisse der Arithmetik, das andere der Geometrie ausschließend angehöre. Denn das eine wie das andere hat sowohl bey Zahlen, als bey ausgedehnten Größen Statt, und beyde zu-

sammen bestimmen die Grenzen der Elementarmathematik. Vielmehr haben jene Benennungen ihren Ursprung wahrscheinlich daher, daß das eine dieser Verhältnisse den Gegenstand der ersten Operationen der Arithmetik ausmacht, das andere hingegen vom Euklides im fünften Buche seiner Elemente zuerst vollständig abgehandelt worden ist.

Die übrigen in der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen vorkommenden Benennungen werden hier aus dem vierten Abschnitte als bekannt vorausgesezt.

§. 209.

Nennt man in einem arithmetischen Verhältnisse das Vorderglied a und die Differenz d, so ist $a - a + d$ ein allgemeiner Ausdruck für jedes arithmetische Verhältniß, und $a - (a + d) = b - (b + d)$ ein allgemeiuer Ausdruck für jede arithmetische Proportion. Aus dem lezteren ergiebt sich unmittelbar der Hauptsaz des §. 44 von der Gleichheit der arithmetischen Summe der äußeren und mittleren Glieder in der arithmetischen Proportion, da $a + b + d = a + d + b$. Aus diesem aber folgen alsdann wiederum die beyden Säze des §. 45, nämlich

I. wenn man hat $a - (a + d) = b - x$,
so ist $a + x = a + d + b$ und mithin
$x = a + d + b - a = b + d$.

II. Wenn man hat $a - x = x - a + 2d$,
so ist $2x = 2a + 2d$, und mithin
$$x = \frac{2a + 2d}{2} = a + d.$$

§. 210.

Verschiedene neuere, besonders französische, Mathematiker wollen der arithmetischen Proportion den Namen einer Porportion gar nicht zugestehen, sondern sie vielmehr Gleichheit der Differenz (équidifférence) genannt wissen.

So sagt unter andern Lacroix in einer Anmerkung zu der, seiner Ausgabe von Clairaut's Algebra vorgesezten, Arithmetik von Biot S. 187.

„Diese Benennungen (arithmetische und geometrische Proportion) sind sehr fehlerhaft. Das Wort „Proportion hat in unserer Sprache einen bestimmten Sinn, welcher den Zahlen, die gleiche Differenzen haben, auf keine Weise zukommt. Außerdem ist „die sogenannte geometrische Proportion nicht weniger „arithmetisch, als die, welche ausschließend diesen Namen führt. Lagrange hat in seinen, in der Normalschule gehaltenen, Vorlesungen den Sprachgebrauch „in dieser Hinsicht berichtiget, und ich habe seinem „Beyspiele gefolgt."

Wenn ich dagegen, mit aller Achtung für die Verdienste eines Lagrange und Lacroix, erkläre, daß ich eben so wenig diesem Beyspiele folgen, als in dieser unbefugten Aenderung des Sprachgebrauchs eine Berichtigung erkennen kann, so übernehme ich eben damit die Verbindlichkeit den bisherigen Sprachgebrauch zu rechtfertigen. Diese Rechtfertigung lässet sich nun am befriedigendsten aus der ursprünglichen und eigentlichen Bedeutung des Worts proportio führen. Bekanntlich ist dieses Wort spätteren Ursprungs und — ein Paar Stellen bey Cicero und Varro ausgenommen, in welchen das griechische ἀναλογια dadurch ausgedrückt ist, — bey keinem der älteren römischen Klassiker zu finden. Wohl aber findet man bey vielen von diesen, namentlich bey Cicero, Plinius, Livius, Tacitus, Curtius oft und in mancherley Verbindungen den Ausdruck pro portione, welcher immer unserm teutschen nach Maßgabe, oder nach Verhältniß entspricht, z. B. pro portione multitudinis, laboris, periculi, gradus, navatae operae u. s. w. Offenbar ist also das Wort proportio aus pro portione ebenso entstanden wie proconsul aus pro consule, propraetor aus pro praetore u. a. m.

Da nun der Ausdruck pro portione in allen angeführten Beyspielen eine Gleichheit zweyer Verhältnisse andeutet, so muß eben dieses auch die ursprüngliche und eigentliche Bedeutung des Worts proportio

seyn. Daß aber diese Verhältnisse ebensogut arithmetische, als geometrische seyn können, würde, wenn es nicht vielmehr à priori aus dem Begriffe der Sache abgeleitet, als à posteriori aus dem Sprachgebrauche bewiesen werden müßte, das einzige bey §. 118 angeführte Beyspiel von dem Preise, welchen Alexanders Soldaten für die Ersteigung von Petra Sogdiana erhielten, zu beweisen völlig hinreichend seyn. Denn dort entsprach deutlich die portio praemii uno talento accisi der portioni diminuti periculi proximo cuique relicti.

Außerdem wäre, wenn man auch sonst gar keinen Grund dafür hätte, doch der im neunten Abschnitte gewählte Vortrag der so wichtigen Lehre von den Logarithmen, welchem, zur Belehrung des Anfängers, nach meiner wohl gegründeten Ueberzeugung, vor allen andern der Vorzug zuerkannt werden muß, schon der sprechendste Beweis von der Nuzbarkeit und Fruchtbarkeit der bisher zum Grunde gelegten Ansicht und Darstellungsart von den arithmetischen Proportionen und Progressionen und die vollgültigste Rechtfertigung des in dieser Lehre bisher befolgten Sprachgebrauchs.

§. 211.

Wenn von zwey ungleichen Größen A, C die kleinere C etlichemal wiederholt die größere A genau hervorbringt, oder eine der größeren gleiche giebt, so sagt man die kleinere C *messe* die größere A, oder jene sey ein *Maaß* von dieser.

Hat die Größe C diese Eigenschaft nicht nur in Ansehung der A, sondern auch in Ansehung einer andern B, so verschieden übrigens die Zahlen seyn mögen, nach welchen die C wiederholt werden muß, um die A und B hervorzubringen, so heißt die C ein *gemeinschaftliches Maaß* der beyden A und B.

Eben so heißen die beyden A und B alsdann auch *Vielfache* von der C, die C aber ein *Theil* von ihnen.

Im Lateinischen nennt man einen solchen Theil (der etlichemal wiederholt das Ganze selbst giebt) pars

aliquota; jeden Theil hingegen der diese Eigenschaft nicht hat, sondern der, etlichemal wiederholt, entweder das Ganze selbst und noch einen Theil von ihm, oder ein Vielfaches des Ganzen giebt, pars aliquanta. Im Teutschen kann man füglich einen Theil der ersten Art durch das Wort Theil ohne Beysaz, einen Theil der andern Art hingegen durch das Wort Theilvielfaches bezeichnen. So sind z. B. 2, 3, 4, 6 Theile der Zahl 12, hingegen 8 ist ein Theilvielfaches von ihr, nämlich das Doppelte ihres dritten Theils 4.

Zwey Größen A, B heißen Gleichvielfache von zwey andern C, D wenn die größere A die kleinere C ebenso oft enthält, als die größere B die kleinere D; und die lezten C, D heißen alsdann gleiche Theile (partes aequealiquotae) der ersten A, B. Jede Gleichvielfachen solcher gleichen Theile aber heißen gleiche Theilvielfachen (partes aequealiquantae) der Größen A, B.

§. 212.

Alle Vergleichungen der Größen und ihrer Vielfachen, Theile und Theilvielfachen beruhen auf dem folgenden allgemeinen Grundsaze: Von gleichen Größen sind alle Gleichvielfachen gleiche Theile und gleiche Theilvielfachen einander gleich, von ungleichen aber ungleich, nämlich von der größeren größer, und von der kleineren kleiner; und umgekehrt: Größen, deren Gleichvielfachen, gleiche Theile und gleiche Theilvielfachen gleich sind, sind selbst einander gleich; wo aber diese ungleich sind, da sind auch die Größen ungleich, diejenige nämlich ist größer, als die andere, deren gleiche Vielfachen, Theile oder Theilvielfachen größer, als die der andern sind.

§. 213.

Bey dem geometrischen Verhältnisse heißt diejenige ganze oder gebrochene Zahl, welche anzeigt, wievielmal das Hinterglied eines Verhältnisses in seinem Vordergliede enthalten sey, der Exponente des Verhältnisses. Das Verhältniß heißt ein rationales oder irrationales, je nachdem der Exponente eine rationale oder irrationale Zahl ist.

Wenn der Exponente ein Bruch ist, so enthält die größere Größe nicht die kleinere selbst, sondern nur einen Theil von ihr.

§. 214.

Aus diesen Erklärungen fließen folgende Säze:

I. Das geometrische Verhältniß zweyer Größen A, B wird bestimmt, dadurch daß man den Exponenten desselben angiebt.

II. Das Vorderglied A des Verhältnisses A : B erhält man, wenn man das Hinterglied B mit dem Exponenten multiplicirt. Das Hinterglied B aber erhält man, wenn man das Vorderglied A mit dem Exponenten dividirt.

III. Den Exponenten des geometrischen Verhältnisses A : B findet man, wenn man das Vorderglied A durch das Hinterglied B mißt.

Sind daher die Glieder des Verhältnisses Zahlen, so erhält man den Exponenten durch die Division des Vorderglieds mit dem Hintergliede; sind aber die Glieder Größen eigener Art (quanta sui generis) so findet eine solche Division nicht Statt, weil der Divisor immer eine Zahl seyn muß.

IV. Exponenten und Quotienten sind demnach nur in dem Falle einerley, wenn die Größen A, B Zahlen sind. Sie sind hingegen in folgenden Rücksichten wesentlich unterschieden:

a) Bey dem Verhältnisse A : B ist die Frage nach dem Multiplicator womit B multiplicirt werden muß, um A zu erhalten; hingegen bey der Division der Größe A durch die B ist die Frage nach dem Multiplicandum, das mit B multiplicirt werden muß, um A zu erhalten.

b) Bey dem Verhältnisse A : B müssen nothwendig beyde Glieder gleichartig seyn, hingegen bey der Division der Größe A durch die B kann das Dividendum eine Größe von jeder andern Art, als der Divisor seyn.

c) Bey dem Verhältnisse A : B kann B jede mit A gleichartige Größe seyn, hingegen bey der Division der Größe A durch die B muß der Divisor B nothwendig eine Zahl seyn.

d) Bey dem Verhältnisse A : B ist der Exponente allemal eine Zahl; hingegen bey der Division der Größe A durch die B ist der Quotiente immer mit dem Dividendum gleichartig, und kann also jede Größe seyn.

§. 215.

Da von zwey incommensurabeln Größen keine durch die andere sich messen lässet, so passen die Erklärungen §. 208. 213. nur auf commensurable Größen. Um also auch die incommensurabeln Größen unter den Begriff des Verhältnisses zu bringen, wie die gewöhnliche Bedeutung dieses Worts es fordert, muß man die obigen Erklärungen durch Hinzusezung einer neuen Bestimmung erweitern. Dazu führt der folgende Saz.

§. 216.

Wenn A und B incommensurable Größen sind, so wird ihr geometrisches Verhältniß entweder dadurch angegeben, daß man zwey Grenzen angiebt, zwischen welche der Exponente dieses Verhältnisses beständig fällt, und die diesem Exponenten so nahe kommen, daß ihr Unterschied von demselben für nichts zu achten ist, oder dadurch, daß man den rationalen Theil von diesem Exponenten so genau angiebt, daß der weggelassene irrationale Theil für nichts zu achten ist.

Da (§. 214. I.) das geometrische Verhältniß zweyer Größen dadurch angegeben wird, daß man den Exponenten desselben angiebt, dieser aber bey incommensurabeln Größen sich nie genau angeben lässet, so kann auch das geometrische Verhältniß zweyer incommensurabeln Größen nie genau, sondern bloß durch Näherung, angegeben werden.

Soll aber eine solche näherungsweise ausgedrückte Angabe des Exponenten die Stelle einer völlig genauen

Angabe desselben vertreten können, so muß die Näherung so weit getrieben werden, daß der am Ende zugelassene Fehler für nichts zu achten ist.

Dies erhält man nun auf zweyerley Art.

Erstens dadurch, daß man zwey Grenzen angiebt, zwischen welche der Exponente beständig fällt, und welche diesem Exponenten so nahe kommen, daß ihr Unterschied für nichts zu achten ist.

Denn gesezt, das Vorderglied A enthalte $\frac{1}{m}$ des Hinterglieds B nmal und überdies noch den Rest R, so daß $A = \frac{n}{m} B + R$, (wo $R < \frac{1}{m} B$) und es sey die Ergänzung des Rests zu dem gebrauchten Maaße, $\frac{1}{m} B - R = S$; so ist auch $S < \frac{1}{m} B$, und

$A + S = \frac{n}{m} B + R + S$, oder $A + S = \frac{n+1}{m} B$,

also $A = \frac{n+1}{m} B - S$. Demnach ist $A > \frac{n}{m} B$, aber schon $A < \frac{n+1}{m} B$. Diese Brüche sind alsdann die Grenzen von dem Exponenten des Verhältnisses $A : B$; $\frac{n}{m}$ die kleinere, und $\frac{n+1}{m}$ die größere.

Diese Grenzen aber können einander so nahe gebracht werden, daß sie um weniger, als jede gegebene noch so kleine Größe von einander unterschieden sind. Denn es ist so wohl $R < \frac{1}{m} B$, als $S < \frac{1}{m} B$.

Weil man nun die Zahl m so groß annehmen kann, daß der Bruch $\frac{1}{m}$ kleiner wird, als jeder gegebene noch so kleine Bruch, so kann zugleich R und S kleiner werden, als jede gegebene Zahl. Hat man es aber dahin gebracht, so sind alsdann beyde Grenzen von einander selbst, folglich noch vielmehr von dem

zwischen ihnen liegenden Exponenten um weniger, als jeden gegebenen noch so kleinen Bruch unterschieden, welche von beyden also für den Exponenten gesezt werden mag, so wird nur ein Fehler zugelassen, der für nichts zu achten ist.

Zweytens erhält man es dadurch, daß man den rationalen Theil des Exponenten so genau angiebt, daß der weggelassene irrationale Theil für nichts zu achten ist.

Dies wird zugestanden werden werden müssen, sobald erwiesen ist, daß der rationale Theil von dem Exponenten des Irrationalverhältnisses A : B größer werden könne, als jede gegebene Zahl, die kleiner ist, als der ganze Exponente dieses Verhältnisses.

Das Leztere kann aber auf folgende Art gezeigt werden:

Es sey des Irrationalverhältnisses A : B ganzer Exponente $\frac{n}{m}$, und die Zahl $p < \frac{n}{m}$; der rationale Theil des Exponenten sey $\frac{r}{m}$, wo also $n > r$. Da nach der Vorausseżung $p < \frac{n}{m}$, so sey $p + d = \frac{n}{m}$, und man nehme m so groß, daß $\frac{I}{m} < d$ werde.

Wenn man nun gefunden hat $A = \frac{r}{m} B + R$, so daß $R < \frac{I}{m} B$; so ist auch $R < dB$.

Da nun nach der Vorausseżung $A = \frac{n}{m} B$, aber $\frac{n}{m} = p + d$; so ist auch $A = (p + d) B = pB + dB$.

Aber nach der Vorausseżung ist auch $A = \frac{r}{m} B + R$;

folglich $pB + dB = \frac{r}{m} B + R$. Da nun, nach dem Bewiesenen, $R < dB$, so muß $\frac{r}{m} B < pB$ und mithin $\frac{r}{m} < p$ seyn, was für eine Größe auch B seyn mag.

Wird also der rationale Theil von dem Exponenten des Irrationalverhältnisses A : B auf die ebengezeigte Art größer gemacht, als jede gegebene Zahl, die kleiner ist, als der ganze Exponente, so wird er dadurch so genau angegeben, daß der weggelassene irrationale Theil für nichts zu achten ist. w. z. e. w.

§. 217.

Das geometrische Verhältniß zweyer Größen wird demnach angegeben, dadurch daß man den Exponenten desselben, oder die Grenzen, oder auch den rationalen Theil des Exponenten angiebt (§. 214. I. 216.)

Der Exponente eines jeden geometrischen Verhältnisses kann also durch eine Rationalzahl und mithin durch einen Bruch $\frac{n}{m}$ ausgedrückt werden, bey rationalen Verhältnissen völlig genau, bey irrationalen aber durch eine Näherung, die der erschöpfenden Genauigkeit gleich zu sezen ist.

§. 218.

Zwey geometrische Verhältnisse A : B, C : D heissen gleich, oder vier Größen A, B, C, D geometrisch proportionirt wenn die Exponenten beyder Verhältnisse gleich oder beständig zwischen einerley Grenzen eingeschlossen, oder die rationalen Theile der Exponenten beständig gleich sind, auf was für gleiche Theile der Hinterglieder B, D sie immer bezogen werden mögen.

§. 219.

Wenn $A = B$, so ist

I. $A : C = B : C$

II. $C : A = C : B$ d. h.

Gleiche Größen haben zu einer Größe und eine Größe hat zu gleichen Größen einerley Verhältniß.

I. Da, nach der Vorausſezung, $A = B$ so ist zugleich $A = \frac{n}{m} C$ und $B = \frac{n}{m} C$; folglich (§. 218.) $A : C = B : C$.

II. Da $A = B$, so ist auch zugleich $C = \frac{m}{n} A$, u. $C = \frac{m}{n} B$; folglich $C : A = C : B$ (§. 218.).

§. 220.

Wenn $A : C = B : C$, oder
$C : A = C : B$, so ist
$A = B$; d. h.

Größen, die zu einer dritten einerley Verhältniß haben, und solche, zu welchen eine dritte einerley Verhältniß hat, sind einander gleich.

I. Da (u. d. V.) $A : C = B : C$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} C$, und $B = \frac{n}{m} C$; folglich $A = B$.

II. Da $C : A = C : B$ so ist zugleich $C = \frac{m}{n} A$, und $C = \frac{m}{n} B$; folglich $\frac{m}{n} A = \frac{m}{n} B$, und mithin auch $A = B$.

§. 221.

Wenn $A : B = C : D$ und
$C : D = E : F$, so ist auch
$A : B = E : F$, d. h.

Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

Denn, wenn des Verhältnisses A : B Exponente oder dessen rationaler Theil $\frac{n}{m}$ ist, so ist, weil (n. d. V.) A : B = C : D, auch des Verhältnisses C : D, Exponente oder dessen rationaler Theil $\frac{n}{m}$ (§. 218.), und mithin, da (n. d. V.) C : D = E : F, auch des Verhältnisses E : F Exponente oder dessen rationaler Theil $\frac{n}{m}$; folglich auch A : B = E : F.

§. 222.

Wenn die Quantität einer Größe von der Quantität einer andern so abhängt, daß alle Quantitäten der ersten, die mit gleichen Quantitäten der andern zusammengehören, auch gleich, alle Quantitäten der ersten aber, die mit ungleichen Quantitäten der andern zusammengehören, auch ungleich sind, und zwar so, daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit größeren Quantitäten der andern zusammengehören auch um ebenso vielmal größer sind, wie vielmal größer die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit kleineren Quantitäten der andern zusammengehören, auch um ebenso vielmal kleiner sind, wie vielmal kleiner die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und es sind A, B zwey Quantitäten der ersten Größe, welche mit zwey Quantitäten C, D der andern zusammengehören, so ist immer A : B = C : D, d. h. so sind jede zwey Quantitäten der einen Größe den ihnen zugehörigen Quantitäten der andern proportionirt.

Da (n. d. V.) mit Quantitäten der andern Größe, jede = C, Quantitäten der ersten, jede = A, zusammengehören, so daß mit der Quantität 2C der andern die Quantität 2A der ersten u. s. w. zusammengehört, so gehört im Allgemeinen mit der Quantität mC der andern die Quantität mA der ersten zusammen.

Ebenso gehört mit der Quantität nD der andern die Quantität nB der ersten zusammen. Da nun (n. d. V.) wenn ma = nB, allemal auch mC = nD ist, so hat man immer zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$; folglich A : B = C : D (§. 218.).

§. 223.

Wenn A : B = C : D; so ist je nachdem

$$A \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} B, \text{ auch } C \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} D; \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so ist, je nachdem die erste größer, ebensogroß, oder kleiner ist, als die zweyte, allemal auch die dritte zugleich größer, ebensogroß, oder kleiner, als die vierte.

I. Wenn A = B und mithin des Verhältnisses A : B Exponente = 1, so ist auch des Verhältnisses C : D Exponente = 1 und mithin C = D.

II. Wenn A > B, so ist, im Falle der Rationalität, der Exponente > 1, im Falle der Irrationalität aber der rationale Theil des Exponenten $> \frac{n}{n}$, weil (n. d. V.) A > B, oder $A > \frac{n}{n} B$; folglich ist auch des Verhältnisses C : D Exponente > 1 oder des Exponenten rationaler Theil $> \frac{n}{n}$, nnd mithin auch C > D.

III. Wenn A < B, so ist, im Falle der Rationalität, des Verhältnisses A : B Exponente < 1, und im Falle der Irrationalität des Exponenten rationaler Theil $< \frac{n}{n}$, weil (n. d. V.) A < B, oder $A < \frac{n}{n} B$; folglich ist auch des Verhältnisses C : D Exponente entweder < 1, oder des Exponenten rationaler Theil $< \frac{n}{n}$ und mithin auch C < D.

§. 224

Wenn $A : B = C : D$ so ist, je nachdem $A = mB$, oder $A = \frac{1}{m} B$, oder $A = \frac{n}{m} B$, auch $C = mD$, oder $C = \frac{1}{m} D$, oder $C = \frac{n}{m} D$, d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, und die erste ist ein Vielfaches oder ein Theil, oder ein Theilvielfaches von der zweyten, so ist auch die dritte ein Gleichvielfaches, oder ein gleicher Theil, oder ein gleiches Theilvielfaches von der vierten.

Wenn $A : B = C : D$ und es ist $A = mB$, oder $A = \frac{1}{m} B$, oder $A = \frac{n}{m} B$, d. h. wenn des Verhältnisses $A : B$ Exponente m oder $\frac{1}{m}$, oder $\frac{n}{m}$ ist, so ist auch des Verhältnisses $C : D$ Exponente m oder $\frac{1}{m}$, oder $\frac{n}{m}$ und folglich auch $C = mD$, oder $C = \frac{1}{m} D$, oder $C \equiv \frac{n}{m} D$ (§. 218.)

§. 225.

Es ist $mA : A = mB : B$

$\frac{1}{m} A : A = \frac{1}{m} B : B$

$\frac{n}{m} A : A = \frac{n}{m} B : B$ d. h.

Alle Größen verhalten sich wie ihre Gleichvielfachen, wie ihre gleichen Theile und wie ihre gleichen Theilvielfachen.

Der beyden Verhältnisse $mA : A$ und $mB : B$ Exponente ist m; der beyden Verhältnisse $\frac{1}{m} A : A$ und $\frac{1}{m} B : B$ Exponente ist $\frac{1}{m}$, und der beyden Verhält-

nisse $\frac{n}{m}$ A : A und $\frac{n}{m}$ B : B Exponente ist $\frac{n}{m}$; folglich sind die Verhältnisse gleich (§. 218.).

§. 226.

Wenn A : B = C : D, so ist auch invertendo B : A = D : C d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch umgekehrt proportionirt.

Da (n. d. V.) A : B = C : D, so ist immer zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$; folglich auch zugleich $mA = nB$ und $mC = nD$, und mithin $B = \frac{m}{n} A$, und $D = \frac{m}{n} C$; also die Exponenten der Verhältnisse B : A und D : C oder deren rationale Theile, folglich auch die Verhältnisse selbst (§. 218.) einander gleich, und mithin B : A = D : C.

§. 227.

Wenn die Quantität einer Größe von der Quantität einer andern so abhängt, daß alle Quantitäten der ersten, die mit gleichen Quantitäten der andern zusammengehören auch gleich, alle Quantitäten der ersten aber, die mit ungleichen Quantitäten der andern zusammengehören, auch ungleich sind, aber so, daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit größeren Quantitäten der andern zusammengehören, um ebensovielmal kleiner sind, wie vielmal größer die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit kleineren Quantitäten der andern zusammengehören, um ebensovielmal größer sind, wie vielmal kleiner die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und es sind A, B zwey Quantitäten der ersten Größe, die mit zwey Quantitäten der andern C, D zusammengehören, so ist immer A : B = D : C, d. h. so sind jede zwey Quantitäten der einen Größe den ihnen zu-

gehörigen Quantitäten der andern umgekehrt proportionirt.

Da (n. d. V.) mit Quantitäten der andern Größe, jede = C, Quantitäten der ersten Größe, jede = A so zusammengehören, daß mit der Quantität 2C der andern die Quantität $\frac{1}{2}$ A der ersten, u. s. w. zusammengehört, so gehört im Allgemeinen mit der Quantität mC der andern die Quantität $\frac{1}{m}$ A der ersten zusammen. Eben so gehört mit der Quantität nD der andern die Quantität $\frac{1}{n}$ B der ersten zusammen. Da nun (n. d. V.) wenn $\frac{1}{m}$ A = $\frac{1}{n}$ B, allemal auch mC = nD ist, so hat man folglich immer zugleich $B = \frac{n}{m} A$ und $C = \frac{n}{m} D$; folglich (§. 218.) B : A = C : D; und mithin auch invertendo A : B = D : C (§. 226.).

§. 228.

Wenn A : B = C : D; so ist auch permutando A : C = B : D; d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch verwechselt proportionirt.

Da (n. d. V.) A : B = C : D, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$. Nun ist $\frac{n}{m} B : \frac{n}{m} D =$ B : D (§. 225.); folglich auch A : C = B : D.

§. 229.

Wenn A : B = C : D und
B : E = D : F, so ist auch ordinatim et ex aequo A : E = C : F; d. h.

Wenn Größen, so viel ihrer seyn mögen, paarweise einander so proportionirt sind, daß immer das Hinterglied des einen Verhältnisses das Vorderglied

des nächstfolgenden ist, so verhält sich das erste Vorderglied zum lezten Hintergliede auf der einen wie auf der andern Seite.

Da (n. d. V.) $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$, und $C = \frac{n}{m} D$; und da $B : E = D : F$, so ist zugleich $B = \frac{p}{q} E$, und $D = \frac{p}{q} F$; folglich zugleich $A = \frac{np}{mq} E$, und $C = \frac{np}{mq} F$; mithin auch $A : E = C : F$ (§. 218.)

§. 230.

Wenn $A : B = E : F$ und
$B : C = D : E$, so ist auch perturbate et ex aequo $A : C = D : F$, d. h.

Wenn sechs Größen so proportionirt sind, daß die erste zur zweyten sich verhält wie die fünfte zur sechsten, und außerdem die zweyte zur dritten, wie die vierte zur fünften, so verhält sich auch die erste zur dritten, wie die vierte zur sechsten.

Da $A : B = E : F$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ u. $E = \frac{n}{m} F$; und da $B : C = D : E$, so ist zugleich $B = \frac{p}{q} C$, und $D = \frac{p}{q} E$; folglich zugleich $A = \frac{np}{mq} C$, und $D = \frac{np}{mq} F$, mithin auch $A : C = D : F$ (§. 218.).

§. 231.

Wenn $A : B = C : D$ und $A > B$, folglich auch $C > D$ (§. 223), so ist auch dividendo

$$A - B : \left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = C - D : \left\{\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}\right\},$$ d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch der Ueberschuß des Vorderglieds über das Hinterglied zu ebendemselben Vordergliede oder Hintergliede auf der einen wie auf der andern Seite.

Da $A : B = C : D$; so ist immer zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$, (wo, im Falle der Rationalität, $n > m$, im Falle der Irrationalität aber n nicht $< m$ seyn muß) aber auch zugleich $A - B = \frac{n-m}{m} B$, und $C - D = \frac{n-m}{m} D$, folglich die Exponenten der Verhältnisse $A - B : B$ und $C - D : D$ oder deren rationale Theile einander gleich, und mithin auch die Verhältnisse selbst (§. 218.), also $A - B : B = C - D : D$.

Da nun (n. d. V.) $A : B = C : D$, folglich auch $B : A = D : C$ (§. 226.), so ist auch ex aequo $A - B : A = C - D : C$ (§. 229.)

§. 232.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch componendo

$$A + B : \left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = C + D : \left\{\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}\right\}, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch die Summe des Vorderglieds und Hintergliedes zu eben demselben Vordergliede oder Hintergliede auf der einen wie auf der andern Seite

Nach der Vorausſezung und §. 218. ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$, mithin auch zugleich $A + B = \left(\frac{n}{m} + 1\right) B = \frac{n+m}{m} B$, und $C + D = \left(\frac{n}{m} + 1\right) D = \frac{n+m}{m} D$; folglich $A + B : B = C + D : D$ (§. 218.).

Da ferner (n. d. V.) $A : B = C : D$, so ist auch umgekehrt $B : A = D : C$ (§. 226.), und mithin ex aequo $A + B : A = C + D : C$ (§. 229.).

§. 233.

Wenn $A : B = C : D$ und es ist $A > B$, folglich auch $C > D$ (§. 223.); so ist auch convertendo $A : A - B = C : C - D$ d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch das Vorderglied zum Ueberschusse des Vorderglieds über das Hinterglied auf der einen wie auf der andern Seite; oder:

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch wiederkehrend proportionirt.

Da (n. d. V.) $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$, oder es ist zugleich $B = \frac{m}{n} A$, und $D = \frac{m}{n} C$, (wo wiederum im Falle der Rationalität $n > m$, im Falle der Irrationalität aber n nicht $< m$ seyn muß) aber auch zugleich $A - B = \left(1 - \frac{m}{n}\right) A = \frac{n - m}{n} A$, u. $C - D = \left(1 - \frac{m}{n}\right) C = \frac{n - m}{n} C$; folglich ist $A - B : A = C - D : C$ und mithin auch umgekehrt $A : A - B = C : C - D$ (§. 226.).

§. 234.

Wenn $A : B = C : D = E : F = G : H$ &c. &c. so ist auch antecedentes et consequentes summando

$$A + C + E + G : B + D + F + H = A : B,$$ d. h.

Wenn Größen, soviel ihrer seyn mögen, proportionirt sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder.

Wenn $A : B = C : D = E : F = G : H$ ꝛc. ꝛc.
so ist auch zugleich $A = \frac{n}{m} B$, $C = \frac{n}{m} D$, $E = \frac{n}{m} F$,
$G = \frac{n}{m} H$ ꝛc. ꝛc. (§. 218), und mithin $A + C + E + G +$ ꝛc.
$= \frac{n}{m} (B + D + F + H +$ ꝛc.) (§. 218.); folglich
$A + C + E + G +$ ꝛc. $: B + D + F + H +$ ꝛc.
$= A : B$ (§. 218.).

Da eben diese Schlüsse auf gleiche Art Statt finden, wie groß oder wie klein immer die Zahl der zusammengenommenen Vorderglieder und Hinterglieder seyn mag; so ist damit zugleich der Saz bewiesen, daß jede beliebige Zahl (n) von Vordergliedern zu der gleich großen Zahl von Hintergliedern sich verhalte, wie eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder.

§. 235.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch antecedentes et consequentes differentiando

$$A - C : B - D = A : B, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu einem Hintergliede.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$A : C = B : D$ (§. 228.) folglich
auch $A - C : A = B - D : B$ (§. 231.)
und $A - C : B - D = A : B$ (§. 228.).

§. 236.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$pA : B = pC : D$
$A : qB = C : qD$
$pA : qB = pC : qD$ d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so haben auch jede Gleichvielfache der ersten und dritten zur zweyten und vierten, ferner die erste und dritte zu je-

den Gleichvielfachen der zweyten und vierten, und endlich jede Gleichvielfache der ersten und dritten zu jeden andern Gleichvielfachen der zweyten und vierten einerley Verhältniß.

Da $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$, und $C = \frac{n}{m} D$; folglich auch zugleich $pA = \frac{pn}{m} B$, und $pC = \frac{pn}{m} D$; $A = \frac{n}{qm} qB$, und $C = \frac{n}{qm} qD$; endlich $pA = \frac{ph}{qm} qB$ und $pC = \frac{pn}{qm} qD$. Demnach sind die Exponenten der Verhältnisse $pA : B$ und $pC : D$, $A : qB$ und $C : qD$, $pA : qB$ und $pC : qD$ oder deren rationale Theile einander gleich, nämlich $\frac{pn}{m}$, $\frac{n}{qm}$, $\frac{pn}{qm}$, und mithin sind auch die Verhältnisse selbst einander gleich (§. 218.).

Dies ist zugleich der allgemeine Beweis von §. 50. VI.

§. 237.

Wenn $A : B = C : D$ so ist auch

$$\frac{1}{m} A : B = \frac{1}{m} C : D$$

$$A : \frac{1}{n} B = C : \frac{1}{n} D$$

$$\frac{1}{m} A : \frac{1}{n} B = \frac{1}{m} C : \frac{1}{n} D, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so haben auch jede gleiche Theile der ersten und dritten zur zweyten und vierten, ferner die erste und dritte zu jeden gleichen Theilen der zweyten und vierten, und endlich jede gleichen Theile der ersten und dritten, zu jeden andern gleichen Theilen der zweyten und vierten einerley Verhältniß.

I. Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$A : C = B : D$ (§. 228.)

Nun ist aber $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = A : C$ (§ 225.)

folglich $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = B : D$ (§. 221.)

u. verwechselt $\frac{1}{m} A : B = \frac{1}{m} C : D$ (§. 226.)

II. Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$A : C = B : D$ (§. 228.)

Nun ist aber $B : D = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 225.)

folglich $A : C = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 221.)

und verwechselt $A : \frac{1}{n} B = C : \frac{1}{n} D$ (§. 226.)

III. Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$A : C = B : D$ (§. 228.)

Nun ist aber $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = A : C$ (§. 225.)

folglich $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = B : D$ (§. 221.)

Es ist aber auch $B : D = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 225.)

folglich $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 221.)

u. verwechselt $\frac{1}{m} A : \frac{1}{n} B = \frac{1}{m} C : \frac{1}{n} D$ (§. 226.)

Dies ist zugleich der allgemeine Beweis von §. 50. VII.

Daß der Saz ebenso allgemein gelte, wenn man in dem Ausdrucke desselben überall statt: gleiche Theile sezt: gleiche Theilvielfachen, ist aus dem vorigen §. für sich selbst klar.

§. 238.

Wenn $m : n = p : q$ so ist auch
$mA : nA = pB : qB$ d. h.

Vier zählbare Größen sind proportionirt, wenn ihre Coefficienten es sind.

Da $m : n = mA : nA$ (§. 218.) und
$m : n = p : q$ (n. d. V.), so ist auch
$mA : nA = p : q$ (§. 221.).

Es ist aber $p : q = pB : qB$ (§. 218.) folglich auch
$mA : nA = pB : qB$ (§. 221.).

§. 239.

Wenn $A : B = C : D$, und
$m : n = p : q$, so ist auch
$mA : nB = pC : qD$ d. h.

Wenn man zwey Proportionen hat, wovon wenigstens die eine aus bloßen Zahlen besteht, und man multiplicirt die Glieder der einen mit den gleichnamigen Gliedern der andern, so geben die Producte eine neue Proportion.

Denn wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$pA : qB = pC : qD$ (§. 236.)
Da nun $m : n = p : q$ (n. d. V.)
so ist auch $mA : nB = pA : qB$ (§. 238.)
folglich $mA : nB = pC : qD$ (§. 221.).

§. 240.

Aus dem Saze des vorigen §. ergeben sich nachfolgende zwey neue Säze:

I. Wenn $c^e : m^e = n^e : r^e$, so ist auch
$c : m = n : r$, d. h.

Wenn vier Zahlen proportionirt sind, so sind auch ihre Potenzen von gleichem Grade proportionirt.

Denn wenn $c : m = n : r$, so ist auch
$cc : mm = nn : rr$, und ebenso $ccc : mmm = nnn : rrr$;
(§. 239.) also im Allgemeinen $c^e : m^e = n^e : r^e$.

II. Wenn $c^e : m^e = n^e : r^e$, so ist auch
$c : m = n : r$, d. h.

Wenn vier Potenzen von gleichem Grade proportionirt sind, so sind auch ihre Wurzeln proportionirt.

Denn es sey $c : m = n : x$, so ist auch

$c^e : m^e = n^e : x^e$, (I.); folglich $x^e = \frac{m^e n^e}{c^e}$; Da nun

(n. d. V.) $c^e : m^e = n^e : r^e$, so ist auch $r^e = \frac{m^e n^e}{c^e}$

(§. 48. I.), Demnach $x^e = r^e$; und folglich auch $\sqrt[e]{x^e} = \sqrt[e]{r^e}$, d. h. $x = r$.

§. 241.

Wenn $A : B = C : D$ und
$m : n = p : q$, so ist auch
$\frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{p} : \frac{D}{q}$, d. h.

Wenn man zwey Proportionen hat, wovon wenigstens die eine aus bloßen Zahlen besteht, und man dividirt die Glieder der einen durch die gleichnamigen Glieder der andern, so geben die Quotienten eine neue Proportion.

Denn wenn $m : n = p : q$, so ist auch
$n : m = q : p$ (§. 226.)

folglich $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$ (§. 218. 214. III.)

Da nun $A : B = C : D$ (n. d. V.) so ist auch $A : C = B : D$ (§. 228.) folglich auch $\frac{n}{m} A : \frac{n}{m} C = B : D$ (§. 225. 221.) Da nun $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$ (n. d. Bew.) so ist auch $\frac{n}{m} A : \frac{q}{p} C = B : D$.

Werden nun hier die beyden Vorderglieder mit n, und die beyden Hinterglieder mit q dividirt, was nach §. 237. erlaubt ist, so erhält man

$\frac{1}{m}A : \frac{1}{p}C = \frac{1}{n}B : \frac{1}{q}D$, oder verwechselt

$\frac{1}{m}A : \frac{1}{n}B = \frac{1}{p}C : \frac{1}{q}D$ (§. 228.)

d. h. $\frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{p} : \frac{D}{q}$.

§. 242.

Wenn $A : B = p : q$ so ist

$qA = pB$, und umgekehrt

Wenn $qA = pB$ so ist

$A : B = p : q$ d. h.

Wenn zwey geometrische Verhältnisse, wovon das eine aus Zahlen besteht einander gleich sind, so ist das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte der beyden mittleren gleich; und umgekehrt: Wenn die Glieder zweyer geometrischen Verhältnisse so beschaffen sind, daß das Product der beyden äußeren dem Producte der beyden mittleren gleich ist, so sind die beyden Verhältnisse einander gleich oder die Glieder in einer geometrischen Proportion.

I. Wenn $A : B = p : q$ so ist

$A = \frac{n}{m}B$, und $p = \frac{n}{m}q$ (§. 218.)

folglich $qA = \frac{nq}{m}B$, und

$pB = \frac{nq}{m}B$

und mithin $qA = pB$

II. Wenn $qA = pB$, so ist

$A = \frac{p}{q}B$

Nun ist $A:B = \frac{p}{q}A : \frac{p}{q}B$ (§. 225.)

also $A:B = \frac{p}{q}A : A$

oder $A:B = \frac{p}{q} : 1$

also $A:B = p : q$ (§. 236.)

§. 243.

Wenn bloß von zählbaren Größen die Rede ist, so ist $ma : a = mb : b$ ein allgemeiner Ausdruck für jede geometrische Proportion. Aus diesem ergiebt sich unmittelbar der Hauptsaz des §. 47. von der Gleichheit der Producte der äußeren und mittleren Glieder in der geometrischen Proportion, da $mab = amb$.

Aus dem lezteren aber folgen alsdann wiederum die beyden Säze des §. 48, nämlich

I. wenn man hat $a : ma = b : x$, so ist

$$ax = mab, \text{ und mithin}$$

$$x = \frac{mab}{a} = mb.$$

II. Wenn man hat $a : x = x : ma^2$, so ist

$$x^2 = ma^2 \text{ und mithin}$$

$$x = \sqrt{ma^2} = \sqrt{m}\,\sqrt{a^2} = ma.$$

§. 244.

Um zu drey zählbaren Größen mA, nA und pB die vierte geometrische Proportionalgröße xB zu finden, suche man zu den Zahlen m, n und p die vierte geometrische Proportionalzahl $x = \frac{np}{m}$ (§. 48. I.), so ist diese die Zahl der gesuchten vierten Proportionalgröße d. h. es ist $xB = \frac{np}{m} B$.

Denn da $m : n = p : x$, so ist

$$mA : nA = pB : xB \text{ (§. 238.)}.$$

§. 245.

Um zwischen zwey gleichartigen zählbaren Größen mA und pA die mittlere geometrische Proportionalgröße nA zu finden, suche man zwischen den Zahlen m und p die mittlere geometrische Proportionalzahl $n = \sqrt{mp}$ (§. 48. II.), so ist diese die Zahl der gesuchten mittleren Proportionalgröße, d. h. es ist $nA = A\sqrt{mp}$.

Denn da m : n = n : p, so ist
mA : nA = nA : pA (§. 238.)
folglich $mpA^2 = nA^2$, und mithin
$nA = A\sqrt{mp}$.

§. 246.

Wenn A : B = m : n; so ist
B : C = p : q; A : C = mp : nq;
C : D = r : s; A : D = mpr : nqs;
2c. 2c. 2c. 2c.

d. h.

Wenn das Verhältniß zweyer Größen aus Zahlenverhältnissen zusammengesezt ist, so verhält sich die erste zur zweyten wie das Product aller Vorderglieder zum Producte aller Hinterglieder in den einfachen Zahlenverhältnissen.

Denn da nA = mB und qB = pC (§. 242.) so ist $A = \frac{m}{n}B$ und $C = \frac{q}{p}B$; folglich $A : C = \frac{m}{n}B : \frac{q}{p}B = \frac{m}{n} : \frac{q}{p} = mp : nq$ (§. 236.). Da nun ferner C : D = r : s (n. d. V.) so ist auch
A : D = mpr : nqs (n. d. Bew.)

Und so kann man weiter auf jedes folgende Verhältniß fortschließen, wie groß auch immer die Menge der einzelnen Zahlenverhältnisse seyn mag.

§. 247.

Aus dem Saze des vorigen §. fließen folgende zwey neue Säze:

I. Wenn A : B = m : n; so ist
B : C = m : n; $A : C = m^2 : n^2$;
C : D = m : n; $A : D = m^3 : n^3$.
2c. 2c.

d. h.

Wenn zwey Größen im zweymal höheren Verhältdisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie hie Quadrate, und wenn sie in dreymal höherem Vernältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Würfel dieser Zahlen, u. s. w.

II. Wenn $m : n = \left\{\begin{matrix} A : B \\ A : B \end{matrix}\right\}$, so ist

$$A : B = \sqrt{m} : \sqrt{n};$$

Wenn $m : n = \left\{\begin{matrix} A : B \\ A : B \\ A : B \end{matrix}\right\}$, so ist

$$A : B = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}, \text{ d. h.}$$

2c. 2c.

Wenn zwey Größen im zweymal niedrigeren Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Quadratwurzeln, und wenn sie im dreymal niedrigeren Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Cubikwurzeln dieser Zahlen u. s. w.

Denn wenn $m : n = \left\{\begin{matrix} A : B \\ A : B \end{matrix}\right\}$, so sey

$A : B = p : q$; und es ist $m : n = \left\{\begin{matrix} p : q \\ p : q \end{matrix}\right\} = p^2 : q^2$ (I.)

folglich $p : q = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ (§. 240. II.) und mithin
auch $A : B = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ (§. 221.).

Ist aber $m : n = \left\{\begin{matrix} A : B \\ A : B \\ A : B \end{matrix}\right\}$, und man sezt

wiederum $A : B = p : q$, so ist $m : n = p^3 : q^3$ (I.);

folglich $p : q, = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$ (§. 240. II.)

und mithin auch $A : B = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$ (§. 221.).

§. 248.

Mit dieser Theorie der Proportionen kann man nun sicher durch die ganze Mathematik und alle ihre

Anwendungen ausreichen, während diejenigen, welche sich erlauben Säze, die bloß für Zahlenverhältnisse aus der Division ihrer Glieder hergeleitet sind, in der besondern und gemischten Mathematik auf Verhältnisse von besonderen Größen anzuwenden, dieses Verfahren mit nichts zu rechtfertigen wissen.

Zwar ist es, nach der Meinung gewisser Schriftsteller noch sehr problematisch, ob auch durch die vollständigste und genaueste Auseinandersezung der Proportionstheorie der Wissenschaft oder ihren Schülern überall nur ein Dienst erwiesen werden könne. Verschiedene neuere, besonders französische, Mathematiker glauben nämlich diese Theorie unter die bloßen Schaustücke im Zeughause der Wissenschaft verweisen zu können. So sagt z. B. Lacroix in seinen Anmerkungen zu Clairaut's Algebra (II. Th. S. 331.): „Diese Theorie ist bloß dazu erfunden um „Größen dadurch zu entdecken, daß man sie mit andern vergleicht. Man hat seit langer Zeit die lateinischen Namen beybehalten, welche die verschiedenen „Veränderungen und Verwandlungen bezeichnen, die „eine Proportion leiden kann. Man fängt heut zu „Tage an, das Gedächtniß derer, welche die Mathematik studiren nicht mehr damit zu belasten; und das „ganze Gerüste der Proportionen würde unnütz seyn „wenn man die entsprechenden Gleichungen an ihre „Stelle sezte, welches, wie ich glaube, den Methoden „mehr Gleichförmigkeit und den Begriffen mehr Genauigkeit geben würde."

Daß die Proportionstheorie dazu dient, um unbekannte Größen dadurch zu finden, daß man sie mit andern bekannten, vergleicht, wird ihr doch wohl nicht zum Vorwurfe gereichen sollen.

Daß man die lateinischen Namen der zulässigen Veränderungsarten der Proportionen, aus dem Zeitalter, da die Lehrbücher der Mathematik wie der übrigen Wissenschaften lateinisch geschrieben wurden, bisher beybehalten hat, daran hat man sehr wohl gethan, weil diese Namen gut gewählt sind, und die Sachen, bey der größten Kürze, genau und deutlich bezeichnen.

Daß von einem Kopfe, dem diese wenigen Namen schon zur Last fallen, für die Wissenschaften gar nichts zu erwarten sey, bedarf wohl keines Beweises.

Daß man aber heut zu Tage doch die Studirenden mit denselben zu verschonen anfängt, das hat leider! seinen guten Grund darin, daß kaum der zehnte noch soviel Latein auf die Universität mitbringt, als nöthig ist, um jene Namen nur zu verstehen. Ja es wird in Kurzem noch so weit kommen, daß man den teutschen Lehrbüchern der Mathematik, in welchen mit Buchstaben gerechnet wird, aus demselben Grunde das lateinische Alphabeth wird vorsezen müssen, aus welchem Lacroix dem seinigen das griechische vorzusezen für nöthig hielt.

Was aus den übrigen Theilen der Mathematik, was besonders aus der Geometrie werden soll, wenn man überall nur calculiren will, dies zu versuchen überlasse ich denen, welche ebenso, wie Lacroix, in die Gleichungen verliebt sind.

Ich hingegen halte es für meine Pflicht, meinen Schülern, bey jeder sich darbietenden Gelegenheit, die Ueberzeugung zu verschaffen, daß die Alten Recht gehabt haben, wenn sie sagten, die Proportionstheorie sey die Seele der Mathematik, und daß besonders der Elementarmathematik mit dieser Theorie das allgemeinste, fruchtbarste und schönste Erfindungsmittel würde entrissen werden.

Zwölfter Abschnitt.

Ergänzungen einiger früheren Abschnitte durch die Lehren des zehnten und eilften Abschnitts.

§. 249.

Wenn eine wirkende Ursache C in der Zeit T die Wirkung E, hingegen eine wirkende Ursache c in der Zeit t die Wirkung e hervorbringt, und man soll das Verhältniß der Wirkungen finden, so muß man dabey als Grundsaz annehmen, daß die Wirkungen bey gleichen Ursachen wie die Zeiten, bey gleichen Zeiten hingegen wie die Ursachen sich verhalten. Sezt man nun die Wirkung der Ursache C in der Zeit t sey v, so hat man nach diesem Grundsaze

I. $T : t = E : v$

II. $C : c = v : e$

folglich $CT : ct = E : e$ (§. 59. 246.) d. h. die Wirkungen verhalten sich wie die Producte aus den Ursachen in die Zeiten.

Aus dieser Proportion folgen ferner die zwey nachstehenden:

$$\left.\begin{aligned} C : c &= \frac{E}{T} : \frac{e}{t} \\ T : t &= \frac{E}{C} : \frac{e}{c} \end{aligned}\right\} \text{(§. 237.) d. h.}$$

die Ursachen verhalten sich wie die Quotienten der Wirkungen durch die Zeiten, die Zeiten hingegen wie die Quotienten der Wirkungen durch die Ursachen.

Man sieht leicht, daß die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe in allen Fällen anwendbar ist, wo Dinge vorkommen, die, obschon sie nicht die Namen: Ursachen, Wirkungen und Zeiten führen, doch auf ähnliche Art, wie diese, sich zusammen verhalten.

Zunächst ist also die Auflösung dieser Aufgabe als eine allgemeine Darstellung von der Regel Quinque zu betrachten. Weil man aber auch mehr, als zwey, Proportionen nach eben den Gründen zusammensezen kann, so ist sie eigentlich als eine allgemeine Darstellung von der zusammengesezten Regel de Tri überhaupt anzusehen (§. 64.).

§. 250.

Die allgemeine Auflösung der zur Alligationsrechnung (§. 69.) gehörigen Aufgaben lässet sich kurz so darstellen:

Es sey bey einer gegebenen Mischung aus zweyerley Ingredienzen der Werth der Einheit des Besseren $= a$, des Geringeren $= b$, des Gemischten $= c$, der Gehalt der Mischung von dem Geringeren $= x$, folglich von dem Besseren $= 1 - x$; so ist der Werth von jenem $= bx$, von diesem $= a(1 - x)$. Da nun die Summe der Werthe von dem Gehalte des Geringeren und des Besseren, welcher auf jede Einheit der Mischung kommt, dem Werthe dieser Einheit gleich seyn muß; so hat man

$$bx + a(1 - x) = c, \text{ oder}$$
$$bx + a - ax = c, \text{ oder}$$
$$-bx - a + ax = -c \text{ (§. 162. I.); woraus folgt}$$
$$(a - b)x - a = -c.$$

Nun ist $+a = +a$; dieses beyderseits addirt, giebt

$$(a - b)x = a - c;$$

woraus man endlich, durch Division mit den Coefficienten von x, erhält

$$x = \frac{a - c}{a - b};$$

d. h. der Gehalt der Mi-

schung von dem Geringeren ist gleich dem Quotienten den man erhält, wenn man die Differenz der Werthe der Einheit des Besseren und des Gemischten durch die Differenz der Werthe der Einheit des Besseren und des Geringeren dividirt.

Z. B. Wenn aus 15löthigem und 11löthigem Silber 13löthiges gemacht werden, und man finden sollte, wie viel von jedem zu der Mischung genommen werden müsse, so wäre, da die Löthigkeit des legirten, oder mit andern Metallen gemischten, Silbers nichts anders als die Menge des feinen Silbers in jeder Mark des legirten bezeichnet, und daher weil 1 Mark = 16 Lothen ist, durch Brüche, die 16 zum Nenner haben, ausgedrückt wird, auch bey dem Silber eben das ist, was bey einer Waare der Preis, $a = \frac{15}{16}$, $b = \frac{11}{16}$, $c = \frac{13}{16}$, folglich

$$x = \frac{\frac{15}{16} - \frac{13}{16}}{\frac{15}{16} - \frac{11}{16}} = \frac{15 - 13}{15 - 11}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

Demnach ist $1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

und mithin muß das 15löthige Silber mit dem 11löthigen zu gleichen Theilen gemischt werden um 13löthiges zu erhalten.

§. 251.

Nach dieser Methode lassen sich zwar auch die Aufgaben von solchen Mischungen behandeln, wobey die Zahl der Ingredienzen größer ist, als zwey. Weil man aber nach der gefundenen Formel immer nur den verhältnißmäßigen Antheil von zwey Ingredienzen der Mischung durch Rechnung bestimmen kann, folglich die Verhältnisse der übrigen willkührlich annehmen muß, so

wird alsdann die Menge der möglichen Auflösungen unzählig groß.

Um z. B. die Aufgabe des §. 69. nach der Formel des vorigen §. aufzulösen, benenne man die drey Weine nach ihren fallenden Preisen, so daß der theuerste der erste, und der wohlfeilste der dritte heißt. Nun seze man willkührlich der zweyte und dritte sollen nach einem solchen Verhältnisse zu der Mischung genommen werden, daß auf 3 Eimer von jenem 4 Eimer von diesem kommen; so ist

der Preis von 3 Eimern des 2ten = 75 Thlr.
= = = 4 = = 3ten = 72 = folglich

= = = 7 Eimern der Mischung
aus dem 2ten u. 3ten = 147 Thlr; also
= = = 1 Eimer dieser Mischung = 21 Thlr.

Jezt ist also die Aufgabe in diese verwandelt: Wenn aus zweyerley Weinen von deren einem der Eimer 36 von dem andern 21 Thlr. kostet, ein dritter zusammengesezt werden soll, von welchem der Eimer für 30 Thlr. verkauft werden könne, das Verhältniß der Theile zu finden.

Hier hat man also $a = 36$, $b = 21$, $c = 30$; folglich, nach der obigen Formel

$$x = \frac{36 - 30}{36 - 21} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Die willkührlich zusammengesezte Mischung, von welcher 1 Eimer 21 Thlr. werth ist, muß also $\frac{2}{5}$ des Ganzen betragen, und die übrigen $\frac{3}{5}$ müssen von dem ersten Weine genommen werden, der dem Eimer nach 36 Thlr. werth ist.

Die besonderen Antheile y und z von dem zweyten und dritten Weine findet man alsdann durch die Proportionen

$$7 : \frac{2}{5} = 3 : y$$

$$y = \frac{6}{35}$$

$$7 : \frac{2}{5} = 4 : z$$

$$z = \frac{8}{35}$$

Probe

$$\frac{6}{35} \times 25 = \frac{150}{35}; \quad \frac{8}{35} \times 18 = \frac{144}{35}$$

$$\frac{150 + 144}{35} = \frac{294}{35} = \frac{42}{5} = \frac{2}{5} \cdot 21$$

$$\frac{3}{5} \cdot 36 + \frac{2}{5} \cdot 21 = \frac{108 + 42}{5} = \frac{150}{5} = 30.$$

§. 252.

Um sich von dem Verfahren bey der einfachen Regel Falsi (§. 70.) vollständige Rechenschaft zu geben, kann man von den zwey dabey vorkommenden Größen (der angenommenen und gesuchten) die eine als die Summe der Vorderglieder, die andere als die Summe der Hinterglieder unter mehreren proportionirten Größen betrachten, weil jede zwey Größen sich zusammen verhalten wie ihre gleichen Theile (§. 225.). Nun verhalten sich aber diese zwey Summen zusammen wie jede beliebige Zahl von Vordergliedern zu der gleichgroßen Zahl von Hintergliedern (§. 234. 221.).

Demnach hat man in dem Beyspiele des §. 70. die Proportion: wie sich verhält die Hälfte, der dritte und der vierte Theil der angenommenen Zahl zu der Hälfte dem dritten und dem vierten Theile der gesuchten, so verhält sich die angenommenen Zahl selbst zu der gesuchten; oder, in den dort gewählten Zahlen:

$$13 : 39 = 12 : x, \text{ und mithin}$$

$$x = \frac{39 \times 12}{13} = 36.$$

§. 253.

Das Verfahren welches man bey der doppelten Regel Falsi (§. 71.) anzuwenden hat, lässet sich mit seinen Gründen im Allgemeinen auf folgende Art darstellen.

Nach §. 222. hat man immer die Proportion:

Wie sich verhält der erste Irrthum zum zweyten, so die Differenz der ersten angenommenen und der gesuchten Zahl zu der Differenz der zweyten angenommenen und der gesuchten Zahl.

Sezt man daher die erste angenommene Zahl $= a$, die zweyte $= a'$, den ersten Irrthum $= e$, den zweyten $= e'$ und die gesuchte Zahl $= x$, so hat man

$$e : e' = a - x : a' - x, \text{ und hieraus}$$

$$(a' - x)\, e = (a - x)\, e' \text{ (§. 242.) d. h.}$$

$$e a' - e x = e' a - e' x.$$

Nun ist $+ e x = + e x$, also

$$e a' = e' a + e x - e' x.$$

Nun ist ferner $- e' a = - e' a$; also

$$e a' - e' a = (e - e')\, x; \text{ und mithin}$$

$$\frac{e a' - e' a}{e - e'} = x; \text{ d. h.}$$

Wenn, wie hier angenommen ist, die Irrthümer einerley Zeichen haben, so muß man, um die gesuchte Zahl zu finden jede der angenommenen Zahlen mit dem Irrthume, welchen die andere gab, multipliciren und die Differenz dieser Producte durch die Differenz der Irrthümer dividiren.

Haben aber die Irrthümer verschiedene Zeichen so muß man durch ihre Summe die Summe jener Producte dividiren. Denn wenn z. B. e' negativ wird, so erhält man für die gesuchte Zahl folgenden Ausdruck

$$x = \frac{ea' + ea'}{e + e'}.$$

In dem Beyspiele des §. 71. ist $a = 40$, $a' = 56$, $e = -320$, $e' = -288$, daher nach der ersten Formel

$$x = \frac{17920 - 11520}{320 - 288} = \frac{6400}{32} = 200.$$

§. 254.

Von dieser Methode ist die oben (§. 71.) vorgetragene eine bloße Abkürzung, wozu man durch folgende Betrachtungen gelangt.

Wenn keine von den beyden angenommenen Zahlen die Eigenschaften der gesuchten hat, so braucht man um die leztere zu finden, bloß die Correction zu suchen, welche man bey einer der angenommenen anzubringen hat, um sie in die gesuchte zu verwandeln. Es sey also diese Correction $= z$, es sey ferner e' der kleinere Irrthum und a' die Zahl welche ihn gab, so ist offenbar, daß wenn $a' < x$ ist, die Correction additiv wird, folglich $a' + z = x = \frac{ea' - ea'}{e - e'}$, oder

$$z + a' = \frac{ea' - ea'}{e - e'} \text{ oder}$$

$$z + \left(\frac{ea' - 'ea}{e - 'e}\right) = \frac{ea' - 'ea}{e - 'e}$$

Nun ist $- \left(\frac{ea' - 'ea}{e - 'e}\right) = - \left(\frac{ea' - 'ea}{e - 'e}\right)$, folglich

$$z = \frac{ea' - 'ea - ea' + 'ea}{e - 'e} = \frac{'ea - ea'}{e - 'e} = \left(\frac{a' - a}{e - 'e}\right)'e.$$

Ist hingegen $a' > x$ so wird die Correction subtractiv, folglich $a' - z = x = \frac{ea' - 'ea}{e - 'e}$.

Nun ist $+z = +z$, folglich

$$a' = z + \frac{ea' - 'ea}{e - 'e}; \text{ oder}$$

$$\frac{ea' - 'ea}{e - 'e} = z + \left(\frac{ea' - 'ea}{e - 'e}\right).$$

Nun ist $- \left(\frac{ea' - 'ea}{e - 'e}\right) = - \left(\frac{ea' - 'ea}{e - 'e}\right)$; folglich

$$\frac{ea' - 'ea' - ea' + 'ea}{e - 'e} = z, \text{ oder}$$

$$\frac{ea' - 'ea}{e - 'e} = z, \text{ oder endlich}$$

$$\left(\frac{a - a'}{e - 'e}\right)'e = z; \text{ d. h.}$$

Um die Correction zu finden muß man in beyden Fällen die Differenz der beyden angenommenen Zahlen mit dem kleineren Irrthume multipliciren, und dieses Product, wenn die Irrthümer einerley Zeichen haben, mit ihrer Differenz, wenn sie aber verschiedene Zeichen haben, mit ihrer Summe dividiren, so giebt der Quotiente jedesmal die gesuchte Correction.

So ist, unter den obigen Voraussezungen, in dem Beyspiele des §. 71. nach der ersten dieser Formeln

$$z = \left(\frac{56 - 40}{320 - 288}\right) 288 = \frac{16 \times 288}{32} = \frac{4608}{32}$$
$$= 144.$$

§. 255.

Sezt man in einer arithmetischen Reihe das erste Glied = a, die Differenz der Glieder = d, die Zahl der Glieder = n, so erhält man folgenden allgemeinen Ausdruck für jede arithmetische Reihe

1 2 3 4 5 n
$a; a + d; a + 2d; a + 3d; a + 4d \ldots\ldots a + (n - 1)d$

dessen allgemeines Glied (terminus generalis) $a + (n - 1)d$ dazu dient, jedes Glied der Reihe, dessen Zahl (index) gegeben ist, zu finden.

Wird also das lezte Glied der Reihe = z gesezt, so ist, wenn die Reihe n Glieder hat, $z = a + (n - 1)d$.

Ebenso ist das rte Glied vom Anfange $= a + (r - 1)d$, und das rte Glied vom Ende $= z - (r - 1)d$ (§. 119.); also deren Summe $= a + z$. Wird nun, wenn die Zahl der Glieder ungerade ist, das rte Glied das mittelste, so ist es das rte vom Anfange und vom Ende zugleich; folglich $= \frac{a + z}{2}$.

§. 256.

Ist die Zahl der Glieder n einer atithmetischen Reihe gerade, und man nimmt jede zwey von dem äussersten gleichweit entfernte Glieder zusammen, so ent-

hält die Reihe $\frac{n}{2}$ solcher Paare, deren jedes $= a + z$, und folglich ist die Summe der ganzen Reihe $s = \frac{n}{2}(a + z) = \frac{a + z}{2} n$; d. h. die Summe ist gleich einer Menge von n Zahlen, deren jede $= \frac{a + z}{2}$ ist.

Ist aber die Zahl der Glieder n ungerade, so kommt zu dieser Menge noch eine für das mittelste Glied hinzu, welche auch $= \frac{a + z}{2}$ (§. 255.) ist. Folglich ist auch hier die Summe der ganzen Reihe $s = \frac{a + z}{2} n$.

Demnach kann bey der arithmetischen Reihe immer aus a, n und d, z, und vermittelst dessen alsdann s gefunden werden.

§. 257.

Sezt man in einer geometrischen Reihe das erste Glied $= a$, den Exponenten $= e$, die Zahl der Glieder $= n$, so erhält man folgenden allgemeinen Ausdruck für jede geometrische Reihe

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n \\ & & 2 & 3 & 4 & & n-1 \end{matrix}$$
$$a; ea; ea; ea; ea; \ldots\ldots e^{n-1} a;$$

dessen allgemeines Glied $e^{n-1} a$ dazu dient, jedes Glied der Reihe, dessen Zahl gegeben ist, zu finden.

Wird also das lezte Glied der Reihe $= z$ gesezt, so ist, wenn die Reihe n Glieder hat, $z = e^{n-1} a$.

§. 258

Bezeichnet man die Summe einer geometrischen Reihe mit s, so ist

$$s = a + ea + e^2 a + e^3 a \ldots\ldots + e^{n-1} a.$$

Wird nun diese Reihe mit dem Exponenten e multiplicirt, so erhält man

$$es = ea + \overset{2}{ea} + \overset{3}{ea} + \overset{4}{ea} \ldots + \overset{n}{ea}.$$

Wird endlich die erste Reihe von dieser abgezogen, so erhält man

$$es - s = \overset{n}{ea} - a, \text{ oder } (e - 1)\, s = (\overset{n}{e} - 1)\, a$$

also, wenn man mit dem Coefficienten von s dividirt,

$$s = \frac{(\overset{n}{e} - 1)\, a}{e - 1} = \frac{\overset{n}{ea} - a}{e - 1}.$$

Da nun $z = \overset{n-1}{e}\, a$ (§. 257.), so ist $ez = \overset{n-1+1}{e}\, a = \overset{n}{ea}$. Wird also dieser Werth von $\overset{n}{ea}$ in dem vorigen Ausdrucke gesezt, so erhält man endlich

$$s = \frac{ez - a}{e - 1}.$$

Bey der geometrischen Reihe kann also immer aus a, e und n, z, und vermittelst dessen alsdann s gefunden werden.

§. 259.

Bey der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel werden Anfänger nicht selten durch die Besorgniß beunruhiget, daß sie vielleicht diesen oder jenen Theil des Quotienten zu klein genommen haben könnten. Ein sicheres Mittel, sich darüber in allen Fällen Gewißheit zu verschaffen, muß ihnen daher um desto willkommener seyn, je beschwerlicher die Ausziehung dieser Wurzeln bey etwas großen Zahlen an sich selbst schon ist, wenn man auch keinen Fehler macht.

Ein solches Mittel bieten uns die allgemeinen Formeln für das Quadrat und den Cubus einer zweytheiligen Wurzel $\overset{2}{a} + 2ab + \overset{2}{b}$ und $\overset{3}{a} + 3\overset{2}{ab} + 3\overset{2}{ab} + \overset{3}{b}$ dar. Sezt man nämlich den zweyten Theil der Wurzel $b = 1$, so wird aus der ersten $\overset{2}{a} + 2a + 1$. Indem diese Größe das Quadrat der Wurzel a um das Doppelte dieser Wurzel sammt der Einheit übertrifft,

giebt sie zu erkennen, daß, wenn bey Ausziehung der Quadratwurzel der, nach irgend einer gefundenen Stelle des Quotienten übrigbleibende, Rest kleiner ist, als das Doppelte der, bis dahin gefundenen, Wurzel mit der Einheit zusammengenommen, der Quotiente nicht zu klein angenommen sey; weil wenn er um eine Einheit grösser zu nehmen wäre, sein Quadrat, von der gegebenen Zahl abgezogen, einen Rest lassen müßte, welcher der doppelten Wurzel sammt der Einheit wenigstens gleich wäre.

Die andere Formel hingegen verwandelt sich, wenn $b = 1$ gesezt wird, in $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

Indem diese Größe den Cubus der Wurzel a um das dreyfache Quadrat dieser Wurzel sammt dem Dreyfachen der Wurzel selbst und der Einheit übertrifft, giebt sie zu erkennen, daß, wenn bey Ausziehung der Cubikwurzel der, nach irgend einer gefundenen Stelle des Quotienten übrig bleibende, Rest kleiner ist, als das dreyfache Quadrat der, bis dahin gefundenen, Wurzel sammt dem Dreyfachen dieser Wurzel selbst und der Einheit, der Quotiente nicht zu klein angenommen sey; weil, wenn er um eine Einheit grösser zu nehmen wäre, sein Cubus, von der gegebenen Zahl abgezogen, einen Rest lassen müßte, welcher dem dreyfachen Quadrate der Wurzel sammt dem Dreyfachen der Wurzel selbst und der Einheit wenigstens gleich wäre.

§. 260.

Die in §. 201 und 204 gefundenen Formeln bieten viel bequemere Methoden dar, die Wurzeln der unvollkommenen Quadrat- und Cubikzahlen durch Näherung zu finden, als die oben in §. 105 und 113 beschriebenen sind.

Denn da jede Zahl, die kein Quadrat ist, zwischen zwey zunächst auf einander folgende Quadrate fällt, so läßt sie sich nach der Formel ausdrücken, welche die Wurzel von $p^2 \pm q$ darstellt, wenn man für p^2 das zunächst kleinere oder größere Quadrat und für q die

Zahl sezt, die man zu dem kleineren addiren oder von dem größeren abziehen muß, um die gegebene Zahl zu erhalten.

Ebenso lässet sich jede Zahl, die kein Cubus ist, nach der Formel ausdrücken, welche die Wurzel von $\sqrt[3]{p \pm q}$ darstellt, wenn man für p^3 den nächstkleineren oder größeren Cubus und für q die Zahl sezt, die man zu dem kleineren addiren oder von dem größeren abziehen muß, um die gegebene Zahl zu erhalten.

Von diesen Formeln geben schon die ersten drey bis vier Glieder eine für die allermeisten Fälle mehr als zureichende Genauigkeit. Z. B.

Wenn man die Quadratwurzel ans 2508 verlangt, so ist $\sqrt{2508} = \sqrt{(2500 + 8)} = \sqrt{(\overline{50}^2 + 8)}$; Demnach $p = 50$ und $q = 8$; folglich

$$\sqrt{2508} = 50 + \frac{8}{2.50} - \frac{64}{8.\overline{50}^3} + \frac{512}{16.\overline{50}^5}$$

$$= 50 + \frac{8.\overline{50}^4}{2.50.\overline{50}^4} + \frac{512}{16.\overline{50}^5} - \frac{64.\overline{50}^2}{8.\overline{50}^3.\overline{50}^2}$$

$$= 50 + \frac{4.\overline{50}^4}{\overline{50}^5} + \frac{32}{\overline{50}^5} - \frac{8.\overline{50}^2}{\overline{50}^5}$$

$$= 50 + \frac{25000032 - 20000}{312500000}$$

$$= 50 + \frac{24980032}{312500000} = 50,0799361024$$

Bloß in der lezten Stelle dieses Ausdrucks sollte, wie die Anwendung der Methode des §. 105 zeigt, an Statt der Ziffer 4 stehen 1; folglich ist die Wurzel bis auf Tausendmilliontheilchen genau gefunden.

Eben so ist; wenn man die Cubikwurzel aus 4908 verlangt, $\sqrt[3]{4908} = \sqrt[3]{(4913 - 5)} = \sqrt[3]{(\overline{17}^3 - 5)}$; folglich $p = 17$ und $q = 5$. Demnach

$$\sqrt[3]{4908} = 17 - \frac{5}{3\cdot\overline{17}^2} - \frac{25}{9\cdot\overline{17}^5}$$

$$= 17 - \frac{5\cdot 3\cdot\overline{17}^3}{3\cdot\overline{17}^2\cdot 3\cdot\overline{17}^3} - \frac{25}{9\cdot\overline{17}^5}$$

$$= 17 - \frac{15\cdot\overline{17}^3}{9\cdot\overline{17}^5} - \frac{25}{9\cdot\overline{17}^5}$$

$$= 17 - \frac{(73695 + 25)}{12778713} = 17 - \frac{73720}{12778713}$$

$$= 16 + \frac{12778713 - 73720}{12778713}$$

$$= 16 + \frac{12704993}{12778713} = 16,99423103;$$

wo bloß in der lezten Stelle an Statt der Ziffer 3 stehen sollte 2, also die Wurzel bis auf Zehnmilliontheilchen genau gefunden ist.

§. 261.

Bey der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel leisten die bereits berechneten Quadrat- und Cubiktafeln theils durch gänzliche Ersparung, theils durch beträchtliche Abkürzung der Arbeit gute Dienste; das erste, wenn die gegebenen Zahlen, deren Wurzeln verlangt werden nicht größer, das andere wenn sie größer sind, als die größesten Quadrat- und Cubikzahlen der Tafeln.

Das erste ist für sich selbst klar, das andere mögen folgende Beyspiele erläutern.

I. Gesezt man sollte die Quadratwurzel der Zahl 18144192l6 finden und hätte nur die büchnerischen Tafeln bey der Hand, in welchen die größte Quadratzahl nicht mehr als neun Ziffern hat, so ziehe man, da die gegebene Zahl aus zehen Ziffern besteht, folglich bey der Abtheilung fünf Klassen giebt, also ihre Wurzel ebensoviele Ziffern haben muß, von den höchsten acht Ziffern derselben die nächstkleinere aus acht Ziffern bestehende Quadratzahl, die man in den Tafeln

findet, ab. Diese ist, 18139081, und ihre Wurzel 4259 giebt sogleich die höchsten vier Ziffern der gesuchten Quadratwurzel. Zu dem Reste 5111 ziehe man die lezte Klasse 16 herunter, und verfahre nun nach §. 101. 200, so erhält man die lezte Ziffer 6 der gesuchten Wurzel. Die Rechnung selbst ist diese:

$$\begin{array}{rl} & \overset{a}{\overbrace{}}\ \overset{b}{} \\ & 18|14|41|92|16 \big\} \begin{array}{l} 4259\,6 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ a^2 = & 18|13|90|81| \big\} \\ \hline & 51116 \\ 2a = & (8518)6 \\ (2a+b)\,b = & 51116 \\ \hline & 0 \end{array}$$

II. Gesezt man sollte die Cubikwurzel der Zahl 259083984375 finden, und hätte nur die kleineren vegaischen Tafeln (Wien 1783) bey der Hand, in welchen der größte Cubus nicht mehr, als neun Ziffern hat, so ziehe man, da die gegebene Zahl aus zwölf Ziffern besteht, folglich bey der Abtheilung vier Klassen giebt, und mithin ihre Cubikwurzel ebenso viele Ziffern haben muß, von den höchsten neun Ziffern derselben die nächstkleinere aus neun Ziffern bestehende Cubikzahl, die man in den Tafeln findet, ab. Diese ist 258474853 und ihre Wurzel 637 giebt sogleich die höchsten drey Ziffern der gesuchten Cubikwurzel. Zu dem Reste 609131 ziehe man die lezte Klasse 375 herunter, und verfahre alsdann nach §. 112. 203, so erhält man die lezte Ziffer 5 der gesuchten Cubikwurzel, wie die nachstehende Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{rl} & \overset{a}{\overbrace{}}\ \overset{b}{} \\ & 259|083|984|375 \big\} \begin{array}{l} 6375 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ a^3 = & 258|474|853| \big\} \\ \hline & 609131375 \\ 3a^2 = & (1217307) \\ \left(3a^2+3b+\frac{b^2}{a}\right)ab = & 609131375 \\ \hline & 0 \end{array}$$

§. 262.

Da aber die meisten der bis jezt berechneten Quadrat- und Cubiktafeln, und unter diesen besonders die

Büchnerischen, sehr viele Fehler enthalten, so muß man, um sie zu der eben beschriebenen Absicht mit Sicherheit zu gebrauchen, auch im Stande seyn, sie in zweifelhaften Fällen zu prüfen. Dazu können folgende Betrachtungen führen.

I. Wenn zwey Wurzeln um 1 unterschieden sind, wie n und n + 1, so sind ihre Quadrate n^2, und $n^2 + 2n + 1$, folglich deren Unterschied $= 2n + 1$. Kennt man also das Quadrat irgend einer Zahl, so findet man das Quadrat der um 1 größeren, wenn man zu jenem die Summe seiner doppelten Wurzel und der Einheit addirt. Auf diese Art kann man also alle Quadrate der Reihe nach ohne Multiplication finden; folglich auch die von andern berechneten prüfen.

II. Wenn man ein Stück von der Reihe der natürlichen Zahlen nimmt, und neben diese ihre Würfel stellt, alsdann aber in dieser Reihe der Würfel die Unterschiede jeder zwey nächst auf einander folgenden nimmt, so erhält man eine Reihe von Unterschieden, welche die ersten Unterschiede heißen. Nimmt man in dieser Reihe wiederum die Unterschiede jeder zwey nächst auf einander folgenden Glieder, so erhält man eine Reihe zweyter Unterschiede. Verfährt man auch mit dieser auf gleiche Art, so erhält man eine Reihe dritter Unterschiede, deren Glieder alle einander gleich sind.

Wenn nun zwey Wurzeln um 1 unterschieden sind, wie n und n + 1, so sind ihre Würfel n^3, und $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; folglich deren Unterschied $3n^2 + 3n + 1$. Dieser Ausdruck stellt das allgemeine Glied (§. 255) der Reihe der ersten Unterschiede dar. Sezt man in demselben n + 1 an Statt n; so erhält man das nächstfolgende Glied dieser Reihe $3n^2 + 9n + 7$ und den Unterschied beyder 6n + 6, als das allgemeine Glied der Reihe der zweyten Unterschiede. Wird in diesem abermal n + 1 für n gesezt, so erhält man das nächstfolgende Glied dieser Reihe 6n + 12 und den Unterschied beyder 6, als das allgemeine Glied der Reihe der dritten Unterschiede.

Will man also eine Cubikzahl in den berechneten Tafeln prüfen, so sezt man die vier zunächst über derselben stehenden Cubikzahlen der Reihe nach heraus. Diese geben 3 erste Unterschiede, diese 2 zweyte, und diese den dritten, welcher hier beständig = 6 ist. Addirt man nun 6 zu dem lezten zweyten Unterschiede; so erhält man einen neuen zweyten Unterschied, der zu dem lezten von den ersten Unterschieden addirt einen neuen ersten Unterschied giebt. Dieser aber zu der lezten Cubikzahl addirt, giebt die Zahl, welcher die zu prüfende gleich seyn muß, wenn anders die darüber stehenden richtig sind. Wäre dies aber nicht der Fall, so würde es die Beschaffenheit ihrer Differenzen sogleich dadurch entdecken, daß sie nicht auf die beständige dritte Differenz = 6 führten. Z. B.

In den büchnerischen Tafeln ist 4069 als das Quadrat von 64 angegeben. Will man dieses prüfen, so darf man nur zu dem Quadrate von 63, welches 3969 ist, addiren $2 \times 63 + 1$. Die Summe giebt 4096 als das Quadrat von 64.

In eben den büchnerischen Tafeln ist 778588 als die Cubikzahl von 92 angegeben. Wie diese zu prüfen sey, zeigt die nachstehende Rechnung.

III. Diff.	II. Diff.	I. Diff.	Würfel.	Wurzeln.
			681472	88
		23497	704969	89
6	534	24031	729000	90
	540	24571	753571	91

540
+ 6
546
+ 24571
25117
+ 753571
778688 = 92^3.

Zur Prüfung der Quadratzahlen kann man sich der zweyten Unterschiede, welche bey diesen schon beständig (= 2) sind, auf ähnliche Art bedienen. Z. B.

II. Diff.	I. Diff.	Quadrate.	Wurzeln.
		3721	61
	123	3844	62
2	125	3969	63

$$\begin{array}{r} 125 \\ +\ 2 \\ \hline 127 \\ +\ 3969 \\ \hline \end{array}$$

$$4096 = \overline{64}^2.$$

Die Fehler der büchnerischen Tafeln sind in denen wiederholt, welche sich in dem von Richter herausgegebenen zweyten Theile des vollständigen mathematischen Lexici (Leipzig 1742.) befinden.

Zusäze
zu §. 78.

Den besonderen Kennzeichen der Theilbarkeit zusammengesezter Zahlen durch gewisse bestimmte Factoren kann man noch folgende vier beyfügen:

VI. Alle Zahlen, in welchen die lezten zwey Ziffern durch 4 theilbar sind, lassen sich auch durch 4 dividiren, z. B.

$$\frac{224}{4} = 56; \quad \frac{748}{4} = 187;$$

Denn wenn N eine ganze Zahl bedeutet, so ist immer

$$N = n \cdot 100 + b \cdot 10 + a;$$

folglich $\frac{1}{4}N = n \cdot 25 + \frac{1}{4}(b \cdot 10 + a)$.

Soll also $\frac{1}{4}N$ auch eine ganze Zahl seyn, so muß der Theil von N, welchen die beyden niedrigsten Ziffern zusammen ausmachen, durch 4 theilbar seyn.

VII. Alle Zahlen, welche sowohl durch 2, als durch 3 theilbar sind, oder, mit einem Worte, alle durch 3 theilbaren geraden Zahlen lassen sich auch durch 6 dividiren, z. B.

$$\frac{4506}{6} = 751; \quad \frac{9432}{6} = 1572.$$

Dies folgt aus I und IV.

VIII. Alle Zahlen, in welchen das Doppelte der Einer den höheren Ziffern entweder gleich oder von ihnen um 7 oder ein Vielfaches von 7 unterschieden ist, lassen sich durch 7 dividiren. Z. B.

in der Zahl 105 ist $2 \cdot 5 = 10$, daher

$$\frac{105}{7} = 15.$$

in der Zahl 238 ist $2 \cdot 8 = 16$, und $23 - 16 = 7$

daher $\frac{238}{7} = 34.$

in der Zahl 819 ist $2 \cdot 9 = 18$, und $81 - 18 = 63$

$= 9 \cdot 7$; daher $\frac{819}{7} = 117.$

Denn die Einer einer Zahl verdoppeln und in die erste höhere Ordnung erheben, ist eben so viel, als sie mit 20 multipliciren.

Nun sind aber ausserdem die unveränderten Einer auch einmal da, folglich sind sie alsdann im ersten Falle im Ganzen $(20 + 1)$ mal d. h. 21mal vorhanden. Da nun 21 durch 7 theilbar ist, so muß sich alsdann die gegebene Zahl auch durch 7 dividiren lassen.

Im andern Falle hingegen hat man für die gegebene Zahl den Ausdruck $N = 21 \cdot a \pm 70$ (wenn a die Einer bezeichnet,) und im dritten $N = 21 \cdot a \pm n \cdot 70$ (wenn n eine ganze Zahl bedeutet,) von welchen der eine wie der andere durch 7 theilbar ist.

IX. Alle Zahlen, in welchen die lezten drey Ziffern durch 8 theilbar sind, lassen sich auch durch 8 dividiren, z. B.

$$\frac{2592}{8} = 324; \quad \frac{624856}{8} = 78107.$$

Denn, wenn N eine ganze Zahl bedeutet, so ist immer

$$N = n \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a;$$

folglich $\frac{1}{8}N = n \cdot 25 + \frac{1}{8}(c \cdot 100 + b \cdot 10 + a)$.

Soll also $\frac{1}{8}N$ auch eine ganze Zahl, oder N durch 8 theilbar seyn, so muß der Theil von N, welchen die drey niedrigsten Ziffern zusammen ausmachen, sich durch 8 dividiren lassen.

Von dem unter V. aufgestellten Saze kann man auch auf folgende Art Rechenschaft geben:

Die Zahl 9 hat die Eigenschaft, daß, wenn man die Ziffern, womit die Producte von ihr durch jede andere Zahl, ausgedrückt werden, als lauter Einer betrachtet, zusammen addirt, sie allemal 9 oder ein Vielfaches von 9 geben. Z. B.

1 . 9	=	9					
2 . 9	=	18	=	1	+	8	=
3 . 9	=	27	=	2	+	7	=
4 . 9	=	36	=	3	+	6	=
5 . 9	=	45	=	4	+	5	=
6 . 9	=	54	=	5	+	4	=
7 . 9	=	63	=	6	+	3	=
8 . 9	=	72	=	7	+	2	=
9 . 9	=	81	=	8	+	1	=
10 . 9	=	90	=	9	+	0	=
11 . 9	=	99	=	18	=	1	+ 8 =
12 . 9	=	108	=	1	+	8	=
13 . 9	=	117	=	1	+	1	+ 7 =
ꝛc.		ꝛc.					

} 9

Daher muß jede Zahl, deren Ziffern, als Einer betrachtet, zusammen eine durch 9 theilbare Summe geben, sich auch ohne Rest durch 9 dividiren lassen, weil sie als ein Product von 9 durch eine andere Zahl anzusehen ist.

Zu §. 93.

Daß ein gegebener gemeiner Bruch sich niemals mit erschöpfender Genauigkeit durch einen Decimalbruch ausdrücken lasse, erkennt man an folgenden zwey Merkmalen:

1) wenn bey der Verwandlung zwey auf einander folgende Divisionen einerley Rest geben.

2) Wenn in dem Quotienten die nämlichen Ziffern in einerley Ordnung wieder kommen, in welchem Falle der Quotiente ein periodischer Decimalbruch wird, wie an dem zweyten Beyspiele S. 179 zu sehen ist.

Aufgabe

für solche, welche die Arithmetik zu verstehen glauben.

Einen allgemeinen Beweis des folgenden Satzes zu finden:

Wenn man in einer aus zwey oder mehreren Ziffern bestehenden Zahl eine oder mehrere Ziffern nach Willkühr versezt, und alsdann die Differenz der veränderten und der unveränderten Zahl nimmt, so ist solche jedesmal durch 9 theilbar.

Zur Erläuterung wähle ich die laufende Jahrzahl 1807 wie folgt.

8107	1870
− 1807	− 1807
6300	63
$\frac{6300}{9} = 700$	$\frac{63}{9} = 7$
7180	7018
− 1807	− 1807
5373	5211
$\frac{5373}{9} = 597$	$\frac{5211}{9} = 579$

Anhang.

Geschichte und Literatur der elementaren Arithmetik.

Der Ursprung der Arithmetik verliert sich in dem entferntesten Alterthume; denn sie mußte fast allen andern menschlichen Kenntnissen vorangehen, und war den Menschen schon unentbehrlich, so bald es Eigenthum unter ihnen gab. Wahrscheinlich haben die ersten handelnden Nationen des Alterthums die Grenzen derselben erweitert, einfache Zahlzeichen erfunden, abgekürzte Methoden, und andere Erleichterungen ausgedacht. Und in so fern kann man den Phöniciern die Erfindung der Arithmetik zuschreiben; wenigstens soll Phönix, ein Sohn Agenors, die erste Arithmetik in phönicischer Sprache geschrieben haben. Höchstauffallend ist die fast allgemeine Uebereinstimmung der alten Völker in der Annahme des Decimalsystems, d. h. desjenigen Zahlensystems, in welchem man nach Zehen, und nach jedem Vielfachen von Zehen einen Absaz macht, und wieder von vorne zu zählen anfängt. Sie giebt eine nicht zu verkennende Anzeige, daß fast alle alten Völker, so wie auch jezt noch jeder einzelne Mensch thut, während der Kindheit ihrer Vernunft, nach ihren Fingern gezählt haben.

Zu Zahlzeichen gebrauchten fast alle alten Völker die Buchstaben ihres Alphabeths. Die Phönicier bedienten sich, nebst andern morgenländischen Völkern, der ersten neun Buchstaben zur Bezeichnung der 9 einfachen Zahlen; der neun folgenden, zur Bezeichnung der

9 Zehner, als: 10, 20, 30 u. s. w. und mit dem Reste des Alphabeths und einigen andern dazu genommenen Zeichen, deuteten sie die Hunderter an. Die Griechen entlehnten diese Bezeichnungsart von ihnen, und substituirten blos für die Buchstaben jener die ihrigen, so weit, als sie gleiche, oder ähnliche hatten; wenn sie aber deren keine hatten, so gebrauchten sie dafür nicht die folgenden Buchstaben ihres Alphabeths, sondern nahmen statt dessen lieber besondere Zeichen an. So sezten sie z. B. weil sie keinen, dem phönicischen Bau entsprechenden, Buchstaben hatten, an dessen Stelle, für die Zahl Sechs, das Zeichen 5, welches sie επισημον βαυ (Episemon Bau [d. h. was die Stelle des Bau vertritt]) nannten. Ihre Art, vermittelst ihrer Buchstaben und dieser Zeichen zu zählen, findet man in den ältern griechischen Grammatiken ausführlich beschrieben.

In Griechenland wurde nun die Arithmetik besonders von Pythagoras und seinen Schülern mit vielem Fleiße getrieben. Diese sollen auch schon besondere, den jezt unter uns üblichen ähnliche, Charaktere zur Bezeichnung der 9 einfachen Zahlen gebraucht haben; ob sie aber solche selbst erfunden, oder von den Indiern entlehnt haben, ist noch zweifelhaft. Sie beschäftigten sich übrigens hauptsächlich mit Untersuchungen über die Eigenschaften und Verhältnisse der Zahlen. Ueberhaupt war ihre Arithmetik von der unsrigen völlig unterschieden, und es scheint fast, als ob sie die einfachen arithmetischen Operationen nur im Kopfe gemacht hätten.

Was die Geheimnisse betrifft, die sie, nach den Berichten mancher Schriftsteller, in den Eigenschaften gewisser Zahlen gefunden haben sollen, so hat Barrow's Meinung: daß dies lauter räthselhafte Einkleidungen geheimer Lehren seyen, zu deren Entzifferung wir den Schlüssel noch nicht haben, immer noch viel für sich.

Plato und seine Schule machte sich zwar vorzüglich um die Geometrie verdient, jedoch ohne die Arithmetik darüber zu vernachläßigen.

Von der Alexandrinischen Schule zeichnete sich besonders Euklides durch seine Verdienste, wie um die Geometrie, so auch um die Arithmetik aus. Das 7te, 8te und 9te Buch seiner Elemente sind uns noch ehrwürdige Denkmäler seines kaum erreichbaren Tiefsinns, und werden von dieser Seite die Bewunderung der denkenden Köpfe aller Zeiten behalten, ungeachtet wir die darin enthaltenen Wahrheiten, so weit wir sie nöthig haben, bereits auf viel kürzeren und leichteren Wegen finden können. Wie weit es Archimedes in der Arithmetik gebracht habe, beweiset uns sein Arenarius, welchen Titel diejenige seiner Schriften führt, worin er die Menge der Sandkörner, mit welchen man den ganzen Weltraum ansfüllen könnte, zu bestimmen versucht, und solche kleiner als tausend Decillionen (1 mit 63 angehängten Nullen) herausgebracht hat.

In den ersten Jahrhunderten nach Christi Geburt machten sich Porphyrius, der einen kurzen Begriff der Arithmetik, wie auch eine Abhandlung über die Geheimnisse der Zahlen, und Nikomachus, der ein Lehrbuch der Arithmetik schrieb, um diese Wissenschaften verdient.

Diophantus, zwischen 160 und 360 n. C. G. betrat eine ganz neue Bahn, indem er zuerst die Auflösung derjenigen Aufgaben zeigte, welche jezt den Gegenstand unserer Algebra ausmachen. Man kann ihn daher gewissermaßen als den Erfinder dieser Wissenschaft ansehen. Er hinterließ 13 Bücher arithmetischer Aufgaben, wovon aber nur die ersten sechs, und an der Stelle des 7ten wahrscheinlich das 13te auf uns gekommen sind. Unter seinen Commentatoren ist besonders die treffliche Philosophin Hypatia durch ihre Verdienste um die Ausbreitung gründlicher mathematischer Kenntnisse eben so merkwürdig, als durch ihr trauriges Ende.

Nach der Zerstreuung der alexandrinischen Schule und der Zerstörung ihrer Bibliothek eilte auch die Arithmetik, wie die übrigen mathematischen und alle anderen Wissenschaften, mit schnellen Schritten ihrem Verfalle entgegen. Denn nun hatten sie keinen andern

Zufluchtsort mehr, als die Klöster, wo sie in kurzer Zeit vom Fanatismus größtentheils erstickt wurden. Von dieser Zeit an hören daher, auch im Fache der Arithmetik, die originalen Schriftsteller auf, und bloße Commentatoren der älteren treten an ihre Stelle.

Bey den Römern hatte die Arithmetik kein besseres Schicksal, als die übrigen mathematischen Wissenschaften, welche bekanntlich nie einiges Glück bey ihnen gemacht haben. Erst im Anfange des 6ten Jahrhunderts fand sie unter dieser Nation an Boethius einen Bearbeiter, von dem man sagen kann, daß er gründliche Kenntnisse derselben gehabt habe. Seine Arithmetik ist eine freye Uebersezung des oben erwähnten Werks von Nikomachus, so wie seine Geometrie von den Elementen des Euklides. In diesem Werke bedient sich Boethius gewisser Zahl-Charaktere, deren Erfindung er dem Pythagoras zuschreibt, wahrscheinlich, weil die Griechen, unter deren Anführung er sich gebildet hatte, ihn so, oder weil sie ihn gar nicht über den Ursprung derselben belehrt hatten. Die Früchte der rühmlichen Bemühungen dieses gelehrten Römers wurden indessen durch die Macht der einbrechenden Barbarey erstickt; und hätte nicht jezt die Fürsehung den Arabern die Aufbewahrung der Wissenschaften anvertraut, so waren sie für die Menschheit ohne Rettung verlohren.

Zweyhundert Jahre nach Boethius suchten zwar Beda, und nach diesem Alcuin, wie den übrigen Wissenschaften, so auch der Arithmetik wiederum in etwas aufzuhelfen, aber sie vermochten es nicht, den herrschenden Geist des Zeitalters, das seinen Nacken freywillig unter das Joch des Irrthums und der Unwissenheit beugte, zu überwältigen.

Im 9ten Jahrhunderte schrieb Psellus einen kurzen Begriff der Arithmetik der Alten, welcher erst um die Mitte des 16ten (1556) von Xylandern aus dem Griechischen in das Lateinische übersezt wurde. Während dieses langen Zeitraums waren die Araber für die Christen, was ehedem die Egypter für die Griechen, und für die alte Welt überhaupt gewesen waren, die einzigen Verwahrer aller besseren

Kenntnisse. Zu ihnen wurden daher auch allein gelehrte Reisen unternommen. Keine dieser Reisen hatte jedoch so weit ausgebreitete Folgen, wie die des Gerbert, eines französischen Mönchs, der in der Folge unter dem Namen Sylvesters II. eine Zierde des päbstlichen Stuhls ward.

Dieser floh gegen das Ende des 10ten Jahrhunderts aus seinem Kloster zu den Arabern nach Spanien, wo er unter ihrer Anleitung, mehrere Jahre lang Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik mit glüklichem Fleiße studirte, und nach dieser Zeit seine erworbenen Kenntnisse, als ganz fremde Producte, in den Boden seines Vaterlandes verpflanzte; wodurch er sich das Verdienst erwab, die Abendländer zuerst die Arithmetik in ihrer jezigen Gestalt gelehrt zu haben.

Mit dem Anfange des 13ten Jahrhunderts begann die Dämmerung des schöneren Tages, der nun bald für die Wissenschaften aufging. Jordanus Nemorarius, der um das Jahr 1230 lebte, schrieb eine Arithmetik in 10 Büchern, die von gründlichen Kenntnissen zeugt. Sein Zeitgenosse, Johann de Sacro Bosco (Heiligwald) brachte die Arithmetik der Araber, die bisher immer noch ein Eigenthum der wenigen Mathematiker geblieben war, in den Abendländern in allgemeineren Umlauf.

Gegen die Mitte des 13ten Jahrhunderts machte Maximus Planudes, ein gelehrter Mönch zu Constantinopel, in seinem Werke, das den Titel Ψηφοφορία κατ' Ἰνδους führt, aber nie abgedruckt worden ist, den neueren Griechen zuerst die indischen Zahl-Charaktere und die jezt übliche Art der Numeration, mithin die ersten Gründe unserer neuen Arithmetik bekannt.

In der ersten Hälfte des 14ten Jahrhunderts verfertigte der Mönch Barlaam eine genaue Theorie der arithmethischen Operationen.

Um den Anfang des 15ten Jahrhunderts wurde die Algebra durch Leonhard von Pisa von den Arabern zu den Abendländern gebracht, und sofort über dieser die gemeine Arithmetik eine Zeit lang fast ganz vernachläßiget.

Gegen das Ende des 15ten Jahrhunderts erwarb sich Lucas Paccioli, mit dem Beynamen de Burgo Sancti Sepulchri, Lehrer der Mathematik zu Venedig, um die Ausbreitung mathematischer Kenntnisse große Verdienste. Der erste Theil seines Werks: Summa de Arithmetica et Geometria, das zum erstenmal im Jahr 1494 zu Venedig erschien, enthält eine vollständige Arithmetik der Araber, worin er auch die Regel Falsi, als eine Erfindung der lezteren, unter dem Namen Elcatains Regel vorträgt.

Im 16ten Jahrhunderte theilten zwar die Algebra, Optik, Mechanik und Astronomie fast den ganzen Fleiß der Mathematiker unter sich, und die Arithmetik wurde gleichsam nur als die dienstbare Magd von diesen behandelt. Gleichwohl leisteten ihr in diesem Zeitraume, theils durch Berichtigungen und Erweiterungen ihrer Theorie, theils durch Erleichterungen ihrer Anwendung, folgende Gelehrte große Dienste: Franz Maurolycus, Nicolaus Tartaglia, Christoph Clavius, Reinerus Gemma, von seinem Vaterlande Frisius genannt, Michael Stifel, Prediger zu Holzdorf, und Johann Scheubel, Professor der Mathematik zu Tübingen.

In Stifels Werke findet man schon die Grundlage der Theorie der Logarithmen, durch deren vollständige Entwickelung sich im Anfange des 17ten Jahrhunderts der Schottische Baron, Johann Neper von Merchiston, ein Verdienst erworben hat, das seinen Namen verewigen wird, indem diese Erfindung das Gebiet der Arithmetik so sehr erweitert hat, daß ihr nun alles unterworfen ist, was nur irgend einer Berechnung fähig ist. Nächst Nepern verdienen Heinrich Brigg aus Oxford, und Hadrian Vlacq aus Gouda, welche auf Nepers Rath und nach seiner Anleitung die Logarithmen der natürlichen Zahlen, der erstere derer von 1 bis 20000 und von 90000 bis 101000, der leztere derer von 20000 bis 90000 mit unbeschreiblicher Mühe berechnet haben, unser dankbares Andenken.

Ausser diesen machten sich in der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts Simon Stevin, so wie im

weiteren Verfolge und in der andern Hälfte desselben, Herigon, Dechales, Schott, Tacquet, Rohault und Ozanam um die Aufnahme der Arithmetik verdient.

Das 18te Jahrhundert eröffneten rühmlich die beyden Sturme, Johann Christoph, der Vater, und Leonhard Christoph, der Sohn. Auf sie folgte der unvergeßliche Wolff, welcher der Arithmetik und den übrigen mathematischen Wissenschaften, durch Verfertigung gründlicher Lehrbücher in reiner teutscher Sprache, dieselben Dienste, wie der Philosophie, erwies. Seine Bahn verfolgte der scharfsinnige Hausen, der es im Beweisen noch genauer nahm, und sich dem Geiste der Alten noch mehr näherte.

Unter den neueren Verbesserern der Arithmetik führen Segner, Karsten, Kästner und Schulz die Reihe, deren Verdienste hauptsächlich in Verwandlung des rhapsodistischen Vortrags dieser Wissenschaft in einen musterhaft systematischen, in Vereinfachung und genauerer Absonderung der Principien, in mehrerer Schärfung der Beweise, und in Verbannung alles leeren Regelwerks bestehen.

Verzeichniß
der
vorzüglichsten Schriften über die elementare Arithmetik in chronolochischer Ordnung.

I. Theoretische Werke.

Euklids Elemente, worin das 7te, 8te und 9te Buch von den Zahlen handeln. Die besten Handausgaben des ganzen Werks sind die bärmännische lateinische, Leipzig 1734. 8. (Der Herausgeber hat sich nur unter der Dedication unterschrieben,) und die lorenzische teutsche, Halle 1781. gr. 8. 1. Ausg.

1544.

Arithmetica integra, Autore Michaele Stifelia. Cum Praefatione Philippi Melanchtonis. Norimhergae. 4.

1683.

Andr. Tacquet S. I. Arithmeticae Theoria et Praxis, Bruxellis. 8. Die lezte Ausgabe von Amsterdam 1704, hat Prolegomena, einen Anhang, und Kupfertafeln als Zugaben bekommen.

1690.

Oeuvres Posthumes de Mr. Rohault T. I. II. A la Haye. 8. Die Arithmetik macht die lezte Abtheilung des zweyten Theils aus.

1693.

Cours de Mathématique par Mr. Ozanam T. — V. A Paris. 8. Die Arithmetik ist die erste Abtheilung des 2ten Theils.

1710.

Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften 1 — 4 Th. von Christian Wolffen ꝛc. ꝛc. 1ste Ausgabe, Halle. 8. Dies Werk fängt, wie fast alle nachfolgenden, mit der Arithmetik an.

1713.

Elementa Matheseos universae T. I — V. Autore Christiano Wolfio. Halae Magdeb. 4. Die 2te Ausgabe ist vom Jahr 1730 — 1741.

1732.

C. von Clausberg demonstrative Rechenkunst, 4. Th. 1ste Ausgabe, Leipzig. 8. Die beyden ersten Theile enthalten die theoretische allgemeine Rechenkunst.

1734.

Elementa Matheseos. Auctore Christiano Aug. Hausen P. I. Lipsiae. 4. Das Werk wurde nicht fortgesezt.

1747.

Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie, zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen, ausgefertiget von D. Joh. Andreas Segner, 1ste Ausgabe, Lemgo. 4. 2 A. 1767.

1756.

Jo. Andr. Segneri Cursus mathematicus P. I—V. Halae Magdeb. 8.

1758.

Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv, abgefaßt von Abraham Gotthelf Kästner, 1te Ausgabe, Göttingen. 8. 5te A. 1792. Damit können Anfänger vortheilhaft verbinden: Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie von Johann Friedrich Lempe, 1 — 3r. Th. Altenburg 1781. 8.

1759.

Heinrich Wilhelm Clemms erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften, 1te Ausgabe. Stuttgart. 8. Die neueste Ausgabe ist von 1777.

1760.

Mathesis Theoretica Elementaris atque Sublimior. Auctore Wenc. Jo. Gust. Karsten. Rostochii et Gryphisw. 8.

1764.

Heinrich Wilhelm Clemms mathematisches Lehrbuch, 1r. und 2r. Th. Stuttgart. 8. 1te Ausgabe. Die 2te ist von 1768. 2c. 2c.

1765.

Johann George Büsch, Versuch einer Mathematik zum Nuzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, 1te Ausgabe. Hamburg. 8. Die 3te Ausg. ist von 1790.

1767.

Lehrbegriff der gesammten Mathematik; aufgesezt von Wencesl. Joh. Gustav Karsten. 1r—8r Th. 1te Ausgabe. Greifswalde. 8. Die 2te Ausgabe fängt vom J. 1782 an.

1773.

Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauch in Schulen, von Christlieb Benedict Funk. 1r. Th. Leipzig. 8.

1776.

Johann Friedrich Häseler Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie zum eigenen Unterricht, vorzüglich für Hauslehrer und Gelehrte, welche diese Wissenschaften nicht zur Hauptbeschäftigung machen. Lemgo. 8. Das hier genannte ist in den beyden ersten Theilen des Werks enthalten, der 3te, dessen 2te Abtheilung im J. 1790 erschien, enthält die sphärische Trigonometrie, die Lehre von den Functionen und den Kegelschnitten, nebst ihren Anwendungen. Schade, daß besonders der 3te Theil auf so elendes Papier gedruckt ist!

Carl Friedrich Hindenburgs Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Geseze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden; mit Anwendungen, Anmerkungen, 5 Beylagen und 3 Kupfertafeln. Leipzig. 8.

1778.

Leçons élémentaires de Mathématiques par Mr. l'Abbé de la Caille Nouv. Ed. par Mr. l'Abbé Marie. à Paris. gr. 8.

1780.

Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, von W. J. G. Karsten. 1—3 Th. Greifswald. 8.

1781.

Lehrbuch der Mathematik durch B. F. Mönnich. 1r. Th. 1. 2. Bd. Berlin. gr. 8. 2. A. 1800.

1782.

Encyklopädie, oder zusammenhängender Vortrag, der gemeinnüzigsten Kenntnisse, 1r—3r Th. von Georg Simon Klügel. Berlin und Stettin. 8. 1te Ausgabe. Die Arithmetik ist in der 3ten Abtheilung des 1ten Theils enthalten. 2te Ausg. 2r. Th. 1792.

1785.

Die Elemente der Mathematik in sechs Büchern von Johann Friedrich Lorenz. 1r u. 2r Th. Leipz. 8. 2te Ausg. 1793.

1786.

Der selbstlernende Algebrist, von Abel Bürja. 1. 2. Th. Berlin und Libau. gr. 8. 1. A.

1788.

Vollständige Anleitung zur niedern und höhern Mathematik, von Georg Gottlieb Hahn. 1. 2. Bd. Stuttgart. 8.

1790.

Anfangsgründe der reinen Mathesis von Johann Schulz. Königsberg. 8.

1793.

Vorlesungen über die Mathematik von Georg Vega. 1. Bd. die Rechenkunst und Algebra enthaltend. 2te A. bearbeitet von Konrad Gernrath. Wien. gr. 8.

1795.

Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine par Bézout. à Paris. T. I—VI. 8.

1797.

Anfangsgründe der Mathematik von Georg Gottl. Schmidt. 1. Th. Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Buchstabenrechenkunst. Frankfurt a. M. gr. 8.

Zahlenarithmetik uud Buchstabenrechnung von D. Conrad Diedrich Martin Stahl. Jena. gr. 8. 2te Ausg. unter dem Titel: Anfangsgründe der Arithmetik zum Gebrauche bei Vorlesungen, ebend. 1802.

1800.

Thomas Bugge, erste Gründe der Arithmetik, Geometrie und ebenen Trigonometrie, a. d. Dänischen übersezt von Ludolph Hermann Tobiesen. Altona. gr. 8.

1801.

Grundriß der reinen Mathematik von Bernhard Friedrich Thibaut. Göttingen. gr. 8.

1802.

Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik, auf Revision der bisherigen Principien gegründet, von Carl Christian Langsdorf. Erlangen. gr. 8.

1804.

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, von Friedrich Wilhelm Daniel Snell. Giesen. gr. 8.

II. Praktische Werke.

1626.

Adriani Metii Alcmariani Arithmeticae Libri II. et Geometriae Libri VI. Lugduni Batavorum. 4. 1te Ausgabe.

1732.

E. von Clausberg demonstrative Rechenkunst. Der dritte und vierte Theil enthalten die angewandte Arithmetik.

1734.

Polak's Mathesis forensis. Frankf. a. d. Oder, 1te Ausg. 8.

1741.

Der getreue arithmetische Wegweiser durch Marcum Martini. Berlin. 8.

1743 und 1744.

Joh. Friedr. Unger's Beyträge zur Mathesi forensi, I. und II. St. Göttingen.

1759.

Mich. Lor. Willigs gründliche Vorstellung der Reesischen Regel. Bremen und Göttingen. 8.

1773.

Anfangsgründe der kaufmännischen Rechenkunst von Christoph Pflugbeil. Leipz. 8.

1774.

Die Rechenkunst in zwey Theilen von N. (Nicolaus) Schmid. Leipzig. 8.

1775.

Franz Christian Lorenz Karsten Rechenkunst, 1te Ausgabe Büzow nnd Wißmar 8.

1776.

Reimers Anweisung zur Rechenkunst, 2te Ausgabe. Hamburg. 8.

1781.

Carl Chassot de Florencourt Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenb. 4.

1785.

Joh. Nic. Tetens Einleitung zu Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. Leipzig. 8.

1786.

Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäfte von Abraham Gotthelf Kästner der mathematischen Anfangsgründe 1. Theils 2te Abtheil. Göttting. 8.

III. Logarithmische und andere Tafeln.

1662.

Aegidii Strauchii Tabulae per universam Mathesin apprime utiles. Vitebergae. 12. Hiervon sind wiederholte Ausgaben die Grünebergischen und Sturmischen Tafeln.

1665.

Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium, et Logarithmi Sinuum, Tangentium et Numerorum ab unitate ad 10000 etc. ect. ab A. Vlacq. Hagae Comitum. 8. 1te Ausgabe. Davon hat man sehr viele wiederholte Abdrücke; auch eine durch Hentsch verbesserte Ausgabe. Frankfurt und Leipzig. 1757. Die neueste von J. J. Ebert besorgt, Frankf. a. M. 1790. 8.

1690.

Tetragonometria Tabularia Autore L. Jobo Ludolffo. Francofurti et Lipsiae. 4. Enthält die Quadrate der Zahlen von 1 bis 100000.

1701.

Joh. Pauli Buchneri Tabula Radicum Quadratorum et Cuborum ad Radicem 12000 extensa. Norimberg. 8. dim.

1711.

In diesem Jahre besorgte Wolff zu Halle seine erste Ausgabe logarithmischer Tafeln, von welcher in den Jahren 1728 und 1755 wiederholte Auflagen veranstaltet wurden.

1742.

Des vollständigen Mathematischen Lexici Zweyter Theil (besorgt von Richter) Leipzig. gr. 8. Enthält außer den logarithmischen und trigonometrischen viele andere nützliche Tafeln.

1770.

J. H. Lambert's Zusäze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Berlin. 8.

1772.

Allgemeine logarithmische Geld- und Wechsel-Arbitrage-Tabellen von Aaron Kalman Cohen. Düsseldorf. 8.

1778.

Johann Carl Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln, 1r. und 2r. Band. Berlin. 8.

1783.

Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, herausgegeben von Georg Vega. Wien. 8. Eine zweyte erweiterte Ausgabe davon und zugleich die vollkommenste teutsche Handausgabe ist die von 1797. Leipzig. gr. 8. 2 Bde. Eine andere, davon etwas abweichende nicht ganz so vorzügliche, die von 1793. Ebend.

1795.

Tables portatives des Logarithmes par Francais Callet à Paris an III. 8. edition stéréotype. Ist die vollkommenste französische Handausgabe.

1803.

Nelkenbrechers Taschenbuch der Münz- Maaß- und Gewichtskunde. Achte Auflage durch M. R. B. Gerhardtsen. Berlin. 8. Ist zu den Vergleichungen der Münzen, Maaße und Gewichte verschiedener Länder unentbehrlich.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 4 Zeile 1 von oben ist statt des Punkts ein Komma zu sezen und statt Das zu lesen: das
— 8 — 5 v. o. statt drr lies der.
— 11 — 12 v. o. st. del l. der.
— — — 13 v. o. st. vier l. viel.
— 38 — 11 v. o. st. Namens l. Nenners.
— 43 — 9 v. o. st. wurde l. wurden.
— 46 — 7 v. u. st. von l. vom.
— 47 — 14 v. u. ist nach dem Worte Lehre einzuschalten: von.
— 60 — 4 v. o. st. Werihe l. Werthe.
— 62 — 17 v. u. st. unterinander l. untereinander.
— 65 — 14 v. u. st. Zahlen l. Zahlen.
— 81 — 1 v. u. st. 4 : G = G : 6 l. 4 : G = G : 16.
— 99 — 4 v. u. st. 1140 l. 1440.
— 123 — 11 v. u. st. Verhältniß l. Verhältniß.
— 129 — 1 v. u. st. $\frac{1}{4}$ l. $\frac{17}{4}$.
— 137 — 2 v. u. st. Erfindungsmittel l. Erfindungsmittels.
— 139 — 3 v. o. st. Produlte l. Producte.
— — — 6 v. o. st. Facroren l. Factoren.
— 142 — 1 v. o. st. Nestes l. Restes.
— — — 9 v. u. st. dem l. den.
— 162 — 18 v. o. st. der Stelle l. die Stelle.
— 167 — 5 v. o. ist nach dem Worte: viele einzuschalten: Ziffern auf das.
— 170 — 12 v. o. ist das Wort: durch wegzustreichen.
— 173 — 10 v. o. st. der l. des.
— 182 — 13 v. u. st. jeöer l. jeder.
— 184 — 3 v. u. st. dez l. der.
— — — 2 v. u. st. anuhängen l. anzuhängen.
— 203 — 9 v. o. st. o l. so
— 205 — 3 v. u. ist nach dem Worte: Wurzel einzuschalten: und dem Cubus.
— 212 — 4 v. o. st. fich l. sich.
— 221 — 15 v. o. st. fortsezt l. fortgesezt.
— 225 — 6 v. o. st. els l. als.
— 227 — 7 v. u. st. folgonde l. folgende.
— 231 — 10 v. u. st. geometiischen l. geometrischen.
— 232 — 6 v. o. st. unterscheiden l. unterschieden.
— 236 — 3 v. o. st. größen l. großen.
— 244 — 9 v. u. st. Kennzifffer l. Kennziffer.
— 249 — 2 v. o. st. Tafel l. Tafeln.

Seite 268 Zeile 15 v. o. st. Verneinigung l. Vereinigung.
— 287 — 1 v. o. st. vieitheilige l. vieltheilige.
— 307 — 2 v. u. st. dir l. der.
— 320 — 16 v. u. st. demslben l. demselben.
— 382 — 3 v. u. st. atithmetischen l. arithmetischen.
— — — 2 v. u. st. dem l. den.

Neue

Neue Bücher, welche in den Jahren 1806—1807 in der Kriegerschen Buchhandlung erschienen und zu haben sind.

Anweisung, kurze, die Haarseile oder Eiterbänder und Fontenelle bey den Krankheiten der Pferde nützlich anzuwenden. 8. 1806. 8 kr.

Anweisung für die Schullehrer in der Grafschaft Wittgenstein. 8. 2te Aufl. 1806. 36 kr.

Bauer, Dr. Ant., Grundsätze des peinlichen Prozesses. gr. 8. 1806. 2 fl. 45 kr.

— — Elementarsystem der Rechtswissenschaft. 1r Thl. enthält: Naturrecht. 8. 1807. 2 fl. 24 kr.

Belehrungen eines erfahrnen Pferdekenners über den Strengel, die Druse, den Rotz, den Wurm und die Lungensucht der Pferde. 8. 1806. 18 kr.

Biblische Gotteslehre, oder der ächtbiblische Glaube von Gott dem Vater, Sohne und heil. Geiste. 8. 1807. 18 kr.

Biskamp, S. C., Versuche im Gebiete der Moralphilosophie für gebildete Leser aus allen Ständen. 8. 1807. 1 fl. 12 kr.

Die blitzgeschwinde Briefpost, oder sinnreiche Kunst des Orients, Tauben zum Bestellen der Briefe abzurichten, nach dem Arabischen des Michael Sabbag. 8. 1807. 12 kr.

v. Burgsdorf's Anleitung zur sichern und zweckmäßigen Anpflanzung der einheimischen und fremden Holzarten. gr. 8. 2te verbess. Aufl. 2 fl.

Busch, J. D. System der gesammten Thierarzneikunde 1r Theil, gr. 8. 1806. 3 fl.

v. Cancrin, F. D., vollständige Abhandlung von den Oefen und Kaminen im Russischen Reiche und ihrem bessern Bau ꝛc. Mit 10 Kupf. 8. 1806. 2 fl. 24 kr.

— — vollständige Abhandlung vom Theerbrennen. Mit 5 Kupf. 8. 1 fl. 12 kr.

Degerando, J. M., vergleichende Geschichte der Systeme der Philosophie, mit Rücksicht auf die Grundsätze der menschlichen Erkenntniß. Aus dem Französ. mit Anmerk. von Professor Tennemann. 1r und 2r Theil. gr. 8. 1806 u. 1807. 7 fl. 12 kr.

Hessische Denkwürdigkeiten, herausgegeben von K. W. Justi. 4r Bd. 1te u. 2te Abtheil. 8. 1806. 6 fl.

Dispensatorium Elect. Hassiacum, curavit Ph. I. Piderit. 8maj. 1806. 2 fl. 45 kr.

Dasselbe teutsch, durchgesehen von Hrn Oberhofrath Piderit, übersetzt und mit Vermehrungen von Dr. Elias. gr. 8. 1807. 2 fl. 24 kr.

Euklids Elemente, von Hauff übersetzt, 2te verbesserte Auflage. gr. 8. 1807. 2 fl. 15 kr.

Fenner, D. H., das Schlangenbad in medicinischer Rücksicht. 8. 1806. 24 kr.

* Gedike, lateinisches Lesebuch, verbessert herausgegeben von P. Werneburg. 8. 1806. 27 kr. (Man lese die Vorrede.)

Index plantarum Marburgensium. 8. 1807. 24 kr.

Krebs, Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, 4te v. K. L. Langsdorf verbess. Aufl. 8. 1807. 27 kr.

Kulenkamp, E. J., das Recht der Handwerker und Zünfte. 8. 1807. 1 fl. 48 kr.

— — Versuch einer Geschichte der Stadt Trayfa in der Grafschaft Ziegenhain. 8. 1806. 54 kr.

Der Landprediger bey ungewöhnlichen Todesfällen, ein Wegweiser für meine jüngern Amtsbrüder, von T. 8. 1807. 1 fl. 20 kr.

Lorsbach, G. W., neue Beyträge zu den Apokryphen des neuen Testaments, aus den heil. Büchern der Johannisjünger. 8. 1806. 1 fl. 20 kr.

Memoriae Profess. clarissimorum Marburgensium. 4. 1 fl. 30 kr.

Museum für biblische und orientalische Literatur, gemeinschaftlich angelegt von A. J. Arnoldi, G. W. Lorsbach und J. M. Hartmann, in Bandes 1s Stück. gr. 8. 1806. 1 fl. 20 kr.

Predigten, abgekürzte, zur Familien-Erbauung und in Filialkirchen zum Vorlesen, herausgegeben von J. B. Müller. 2te verb. Aufl. 4. 2 fl. 15 kr.

Rathgeber, der erfahrne, beym Einkauf der Pferde, die Mängel und Gebrechen derselben zu erkennen und den Betrügereyen der Roßhändler auszuweichen. 8. 1806. 18 kr.

Reinhards, L., kurze Anleitung zur praktischen Feldmeßkunst und Quadratrechnung. Mit Kupf. 8. 1807. 36 kr.

Schwab, Dr. Ernst, vermischte Schriften veterinärischen Inhalts. 2s St. 8. 1806. 54 kr.

Stein's, G. W. OHofr., nachgelassene geburtshülfliche Wahrnehmungen, herausgegeben von G. W. Stein. gr. 8. 1807. 2 fl. 45 kr.

* Taschenbuch für Forst- und Jagdliebhaber für das Jahr 1794. 1795. u. 1796. 2te Aufl. 12. Der Jahrg. 1 fl. 30 kr.

* Taschenbuch für Forst- und Jagdliebhaber vom Hrn. von Wildungen auf's Jahr 1806. m. illum. Kpf. 12. 2 fl. 45 kr.

* Dasselbe auf das Jahr 1807, gemeinschaftlich herausg vom Hrn. Oberforstmeister von Wildungen und Hrn. Regierungsrath Bunsen, mit Kupf. 12. 2 fl. 45 kr.

* Dasselbe auf das Jahr 1808. 2 fl. 48 kr.

Thurns, W. Chr., neuestes allgemeines Lesebuch für die ersten Bedürfnisse der Kinder in ihren verschiedenen Lagen und Verhältnissen. 8. 1807. 54 kr.

Desselben göttliche Erziehung des Menschen. Ein Leitfaden für Prediger und Schulmänner zum Gebrauch für Schulen und Confirmanden. 8. 18 kr.

Versuch einer Anweisung zur Geburtshülfe der Pferde. 8. 1806. 18 kr.

Wachler, Grundriss der Geschichte der älteren und neueren Zeit; als Handschrift für seine Zuhörer. gr. 8. 1 fl. 48 kr.

Wolfrath, F. W., liturgisches Handbuch, oder Anhang zu der Schleswig-Holsteinisch. Kirchenagende. gr. 8. 1806. 54 kr.

Wörterbuch für Forst- und Weidmänner. 2te verbess. Aufl. von Fr. Thon. gr. 8. 1807. 1 fl. 48 kr.

Zwey Augen für eins, Schauspiel in zwey Aufzügen von P. L. Bunsen. Mit Kupf. 8. 1807. 24 kr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hauff, Johann K.

Lehrbuch der Arithmetik

Marburg 1807

Math.p. 207
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081937-0